	MISCELÁNEA POLIANA
	Revista de prepublicaciones del Instituto de Estudios Filosóficos LEONARDO POLO
	SERIE DE FILOSOFÍA, nº 79 (2024)

ISSN: 1699-2849

Registro de propiedad intelectual safecreative nº 0910284775023

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CONOCIMIENTO DE LAS MATEMÁTICAS

Desarrollo del LOGOS en la teoría del conocimiento de Leonardo Polo

Julián Calderón Almendros

Juan Miguel Calderón Almendros

25/07/2017

Índice general

Prólogo

Comencé a escribir este libro como un artículo donde investigábamos, mi hermano Juan Miguel y yo, sobre como es el LOGOS del que habla Leonardo Polo en su *Teoría del Conocimiento*, sobre todo en su tomo IV. Andábamos él y yo intentando comprender el conocimiento de lo extra-mental, de aquello que no está en la mente. Y sin embargo, para ello, había que saber primero como es aquello que sí que está en la mente. Y, para más detalle, conocer lo mejor posible aquello que está definitivamente en la mente, aquello que pensamos que es, primero y antes que nada, pensado. La magnitud del campo de lo que podemos pensar es tal que se nos antoja, definitivamente, intratable si no hay un núcleo del pensar que unifique de alguna forma todo el pensar, la actividad misma de pensar.

En ese proceso andábamos cuando empezamos a encontrar cosas que ir escribiendo y que nos parecieron de entidad suficiente para poder publicarlas.

Nuestro esfuerzo es, primariamente, en teoría del conocimiento y en física filosófica, o simplemente física. Mi formación fundamental es en ciencias físicas y en matemáticas, lo que trae algunos problemas por mi parte a la hora de plasmar las ideas, desviando la atención desde el aspecto fundamental al aspecto formal matemático. Así que, pese a mis esfuerzos, reconozco desde el principio que puede haber cierta confusión en la intención de ciertos apartados, dando la impresión que quiero demostrar cuando en realidad lo que quiero es mostrar lo que está detrás de ese aspecto formal.

Después de haber escrito la mayoría del trabajo vino un descubrimiento sorprendente para mí. Yo había leído con anterioridad a Roberto Saumells, profesor de la Universidad Complutense de Madrid de filosofía de la ciencia, concretamente *La intuición visual*[Saumells, 1994]. Pero es claro que no lo había entendido bien, hasta el punto de confundir su filosofía con una interpretación y desarrollo concretos de las ideas que Kant llama *Estética Transcendental* en la (*Crítica de la Razón Pura*)[Kant, 1787]. Cuando volví a Saumells, después de haber escrito buena parte del libro, leí su *Geometría euclídea como teoría del conocimiento*[Saumells, 1970]. Y me sorprendió porque realmente pensaba algo muy cercano a lo aquí expuesto.

Pero en vez de entablar un diálogo con él en estas líneas lo que quiero resaltar es un temor. Yo no había comprendido a Saumells cuando el quería decir prácticamente lo que yo, en buena medida, ya había pensado. Y cuando lo leo por segunda vez, veo la dificultad en entender lo que quiere decir, y su esfuerzo por explicar su distinción de Kant, los límites de la interpretación kantiana de la geometría, que para nada son las críticas lugar común para un texto que es fundamental en la historia de la filosofía. Saumells detalla ejemplos continuamente, tiene una prosa rica y fluida ... y yo no. Así que me hago cada vez más consciente de que tengo un problema para poder comunicar lo que pienso, pues si yo no he sabido entenderlo y distinguirlo de Kant, y a su vez yo pienso algo fuertemente parecido a lo piensa Saumells y mi verbo no es claro, la dificultad que yo he tenido en entenderlo se verá multiplicada muchas veces para expresarme y que se entienda mi expresión.

Por otra parte leer a Saumells, autor que tiene relación e influencia marcada sobre Polo, sobre todo en el tema tratado en este estudio, me ha aclarado mucho lo que yo mismo pienso, y me sirve de guía para revisar todo lo escrito, y así ha de verse el texto presente, bajo la revisión de la lupa que supone el haber leído *La geometría euclidiana como teoría del conocimiento*[Saumells, 1970] de Saumells.

Por otra parte este estudio no puede tener un carácter acabado en ningún instante, porque en ningún instante trata la relación entre matemáticas y realidad extra-mental. Y ningún pensamiento sobre las matemáticas puede tener un carácter siquiera de comenzado si no se ocupa de ese tema, pues por mucho que el matemático puro trate su campo de conocimientos como cerrado en sí mismo (porque lo es), todo lo que contribuye al conocimiento humano ha de tener una componente que explique su conocimiento de lo físico y, en general, de lo que no es solo su estricto campo de pensamiento.

En este libro por lo tanto tratamos solo la primera parte del problema de las matemáticas, la relación del pensamiento matemático con todo el resto del pensamiento. Cómo es aplicable el pensamiento formal-matemático a lo físico y con tan extremo éxito, eso es el tema del (espero) siguiente libro.

Introducción

A grandes rasgos, se puede hacer una pintura de la filosofía de la matemática de Roberto Saumells diciendo: el conocimiento visual y el que deriva de lo visual no es más que un ejercicio inconsciente de geometría euclidiana, no, evidentemente, de pruebas de teoremas y definiciones, sino de aplicación continua de esos resultados, de forma que la intuición visual es matemática (geometría) en acción, siendo el núcleo de esa matemática no un formalismo inconsciente sino una expresión de las propiedades de la presencia mental (de lo, paralelamente, visual), la intuición visual supone un núcleo pensante del yo de acción geométrica.

A decir verdad, en una entrevista, él mismo recuerda a algún músico que dice que la música es un ejercicio matemático.

A su vez, se aleja de Kant en algún punto importante. ¿Es el espacio geométrico una condición necesaria para la experiencia? Saumells lo niega. El ejercicio de la geometría es fundamento de la intuición visual (que estamos equiparando con espacial) pero en una suerte de forma/materia, dónde la materia vuelve a tener esa dualidad de forma/materia. Cuando hacemos círculos con un compás en una hoja, el utilizar un plano (representado por la hoja) y un elemento constructivo por mantenimiento de distancia (representado por el compás) serían materia respecto a la idea geométrica de circunferencia y círculo. Ese espacio en el que uno dibuja es materia, y no forma. Por el mismo camino también comprende la absoluta formalización como una forma de materia, esto es, la intuición geométrica es un conocimiento concreto (y material por tanto) respecto de una axiomatización de tipo hilbertiana.

De alguna forma, para Saumells, la formalidad de lo geométrico o espacial es conformadora del espacio, y este espacio no puede concretarse matemáticamente.

Si vemos una figura geométrica de estrellas en el cielo nocturno, esa figura está formada por la invitación de las luces y su conformación espacial dada por la unidad de la aprehensión, que es la que da su forma al espacio. El representar esas estrellas o puntos en una superficie plana o en la parte inferior de una semiesfera o en la infinitud tridimensional es siempre posterior a la forma de la figura geométrica conformada.

1. Resumen y propósito de esta investigación

Expongo en este artículo un desarrollo en sí mismo sumario y esquemático de los resultados de nuestras investigaciones sobre qué sea la matemática dentro de una teoría amplia del conocimiento. Partiendo de lo percibido o abstracto de Polo o lo conocido ahora sensible, lo primeramente conocido, la primera determinación objetiva de lo sensible en el intelecto, investigo la línea del pensamiento que produce ideas generales, esto es, lo pensable en sentido propio procedente del abstracto. En este análisis con el que comienzo, la meta es ver qué es lo que no es posible pensar en este ámbito del pensar, sus insuficiencias. La matemática la presento como una superación de las insuficiencias de esta línea del pensamiento objetivo que es la generalizante (que niega notas), presentando qué es lo que ya no es pensado y qué componente del pensar es lo nuevo pensado en la matemática. La búsqueda fundamental será la de un objeto del pensamiento que permita definición estricta a la vez que permite la generación explícita y análisis de las diferencias extrínsecas a la realidad física producidas por el logos matemático. Intentaré que aunque esta investigación parte del *Curso de Teoría del Conocimiento de Leonardo Polo* [Polo, 1996] [1] sea, en la medida de mis posibilidades, auto contenida.

1.1. Ámbito de la investigación

Este trabajo es un estudio del conocimiento que arranca en los estrictos límites de los contenidos de consciencia y de las acciones del intelecto, esto es, miramos solamente dentro del pensar sin intención alguna de referirnos en ningún caso a la realidad extra-mental, esto es, a aquello fuera de la mente. Aunque en un segundo desarrollo de esta teoría del conocimiento, que constituirá una segunda parte de la investigación presente, será importante la referencia a lo físico puramente extra-mental, en la presente introducción nos bastará con el estudio de los contenidos de conciencia y una limitada diversidad de actos de la mente.

Esta aclaración es importante para aquellos que vienen de una filosofía no poliana o husserliana. No es solo fenomenología porque vamos más allá de los contenidos de conciencia, esto es, describimos la actividad mental y nos mantenemos en ella. Así que nuestro objetivo es más la investigación de procesos mentales o del inteligir que los propios productos de ese inteligir, y esto por la convicción que los contenidos de consciencia son solo la otra cara de la moneda de los actos de la mente que los piensa.

Esta aclaración enmarca dónde mirar cuándo se intente comprender lo indagado, de forma que palabras como «objeto» significarán siempre «objeto mental», el significado de «referencia» o «intención» será siempre «referencia a objetos mentales» o con «intencionalidad a los objetos mentales». De hecho, la intención será siempre bien intención primera cuando la referencia es un objeto sensible primario o «abstracta» o segunda si se refiere a otros objetos mentales.

1.2. Palabras, nociones clave y terminología empleada

Teoría del conocimiento ▷ Leonardo Polo ▷ Logos ▷ Logos Unificante ▷ Logos Matemático ▷ Idea Pura ▷ Forma Pura ▷ Matemáticas ▷ Lógica ▷ Lógica Matemática ▷ Operación Cognitiva ▷ Objeto ▷ Movimiento Inmanente ▷ Abstracción ▷ Abstracto ▷ Generalización ▷ Negación ▷ Ideas Generales ▷ Caso ▷ Nota ▷ Intención ▷ Referencia ▷ Definición ▷ Definición Intentada ▷ Razón que pugna ▷ Concepto ▷ Concausalidad ▷ Hábito intelectual ▷ Advertencia ▷ Insuficiencia ▷ Pensable ▷ Extensión ▷ Nombrar ▷ Diferencia Explícita ▷ Diferencia Implícita ▷ Diferencia Intrínseca ▷ Diferencia Extrínseca ▷ Noción ▷ Seguir Pensando ▷ Prosecución Operativa ▷ Prosecución Intelectiva

A continuación aclararemos algunos de estos términos con el fin de precisar su uso.

Sin embargo no podemos reproducir aquí una explicación detallada de estas nociones, que se desarrollan en el «Curso de Teoría del Conocimiento» de Polo[Polo, 1996], y que abarca 4 amplios volúmenes.

1.2.1. Logos, logos unificante y logos matemático

Estos términos quieren significar siempre el segundo término, *Logos Unificante*. Aquí la palabra logos se refiere a una actividad propia del intelecto, la unificación del conocimiento obtenido en lugares diversos del entendimiento o, más bien, en momentos distintos del pensar. Claro que esto, dicho así, se refiere a casi toda la actividad del pensamiento (se comprende siempre como unificante de lo anteriormente pensado). Luego nos referimos a la unificación de distintos contenidos de conciencia, así como a la actividad intelectual que ha de ser condición de unificación del todo el pensamiento. Éste ha sido clásicamente el sentido dado a la palabra *Logos* en un pensamiento no teológico.

Pero realmente, este *Logos Unificante* al que nos estamos refiriendo, es cercano al núcleo del pensar a la vez que es *Logos Matemático*, al menos cuando estos contenidos a unificar se refieren al mundo extra-mental. Así que como consideramos la matemática una actividad propia del *Logos*, y solo consideramos una unificación de las formas de pensar el mundo extra-mental, esto es, tanto como únicamente extra-mental como todo lo pensado a partir del abstracto, determinación sensible o incluso percepción. *Logos* es, en esta investigación, *Logos Matemático* o también *Logos Unificante Matemático*.

1.2.2. Matemáticas, lógica y lógica matemática

No voy aquí a dar una definición de matemática, sino que nos referimos al término no técnico en el sentido en que habitualmente se utiliza (y quizás en ampliaciones en etapas posteriores del estudio).

Si pongo un apartado aclaratorio es porque al significado corriente anterior uno el de lógica clásica silogística, la lógica proposicional y la lógica de predicados, tanto de primer orden como de órdenes superiores.

Hace falta una aclaración sobre el término *lógica*. En la teoría del conocimiento poliano, lógica hace referencia a la flexión propia entre los objetos propios de cada tipo de conocimiento, en los distintos ámbitos del pensar objetivo. La lógica aquí referida es la propia del *Logos Unificante*. Por lo tanto los tres términos, en esta investigación, no son más que la actividad del *Logos Matemático*, esto es, las ciencias puramente formales y objetivas.

Para esclarecer el uso del término lógica en la obra de Polo, la abstracción tiene su lógica, esto es, una forma propia de relacionarse los objetos primarios que llamamos abstracciones. Cuándo tratamos ideas generales, éstas tienen una flexión propia, una lógica más comúnmente conocida y más aproximada a la lógica formal. A su vez, los conceptos obtenidos por la razón que pugna tienen su propia lógica, muy diferente de las anteriores. Y así seguimos con el juicio y con el logos matemático (que es la lógica hace dos párrafos referida).

1.2.3. Abstracción y abstracto

Abstracción es aquí un término técnico: es la primera operación del pensamiento propiamente intelectual, la que nos pone en contacto directo con la experiencia, la que genera la experiencia y alimenta (y se alimenta de) la imaginación y la memoria, la que nos pone en relación con lo particular individual. En otros contextos puede ser sinónimo de percepción [2]. El objeto propio es el objeto sensitivo en presencia o *abstracto* (todo él comprendido de una vez y establecido ante nosotros).

La referencia para profundizar en esta operación cognitiva es [Polo, 1996] en el volumen II.

1.2.4. Generalización, negación (de notas) e ideas generales

Las *Ideas Generales* son los objetos del pensamiento con origen en el abstracto, pero que ya no nombran a un particular, esto es, no son resultado directo de la abstracción, sino que, del cúmulo de ***notas (atributos)*** [3]que vienen integradas en el abstracto, quedan solo algunas de ellas. Por eso decimos que *generalizar es negar notas* (quitarlas del cúmulo de notas, no una negación lógica). Cómo solo nos quedamos con un subcúmulo de notas, todo lo demás se ha perdido, también el implícito de extra-mentalidad. La ventaja de las *Ideas Generales* es precisamente que solo son pensables, unifican una gran cantidad de particulares en sí, y siguen siendo susceptibles de aunarse en nuevas generalizaciones.

Las *Ideas Generales* muy habitualmente llamados *conceptos*, siendo, la diferenciación que hacemos en el texto, propia de Polo, e importante para distinguir de manera más fina entre distintas operaciones mentales. El término «concepto» se utiliza en la presente obra como término técnico de una operación netamente distinguida de la *generalización*.

Será esta vía del pensamiento, la *generalización* o *negación de notas*, la que analizaremos con alguna profundidad ya que su análisis nos ofrecerá un camino natural hacia el logos.

La referencia para profundizar en esta operación cognitiva es [Polo, 1996] en el volumen III.

1.2.5. Razón que pugna y concepto

Razón que pugna es aquí otro término técnico: es una operación que parte del abstracto y que se abstrae en la medida de lo posible de lo explícito, haciendo objeto en el concepto lo que en el abstracto está implícito: lo extra-mental. De alguna forma la " *nota de existencia* " en el abstracto, aquello que nos dice en el abstracto, que no solo es pensado, sino que el abstracto mismo procede en alguna medida de fuera del pensamiento, que es causado. En este punto, esta operación es la que da la nota de realismo no nominalista y no idealista en la teoría del conocimiento poliana. Se utiliza la palabra *concepto* como objeto *concebido a partir del abstracto mediante pugna.*

Estos conceptos no son particulares, sino que denotan realidades universales de lo físico extra-mental.

El apellido *que pugna* es debido a que no se considera que el concepto explícito objetivo sea en ningún momento más que un acercamiento no completable en este nivel al ser extra-mental. Así *la pugna* hace referencia a quitar continuamente lo puramente pensable del concepto para así poder desvelar mejor lo implícito como explícito objetivo.

La referencia para profundizar en esta operación cognitiva es[Polo, 1996] en el volumen IV.

1.2.6. Concausalidad, hilemorfismo y bicausalidad, tricausalidad y tetracausalidad

Concausalidad es lo explicitado en el *concepto*, el objeto propio de la *razón que pugna*. La diferencia con la concausalidad aristotélica es que el *compuesto hilemórfico*, en cuanto que objeto de la razón es contradictorio, con lo que hay que seguir buscando y llegar a la *tricausalidad efectiva, formal, material y eficiente*, que es la única forma de evitar la regresión al problema inicial del movimiento y la pluralidad como aporías. Además las *concausas* solo se pueden tratar como no particulares, esto es, todas las abstracciones nos dan este conocimiento sobre lo extra-mental. La única concausalidad definitivamente estable será la *tetracausalidad*, esto es, añadiendo la causa final de forma no externa al universo (unidad de orden).

Las referencias definitivas para profundizar en la concausalidad es de nuevo [Polo, 1996] en el volumen IV y la obra "Principios reales y conocimiento matemático" de Claudia E. Vanney [Vanney, 2008].

1.2.7. Movimiento inmanente, operación cognitiva y objeto

Las *operaciones cognitivas* son las operaciones dónde el intelecto obtiene *objetos terminados*, son formas de conocer dónde las reglas de manejo de los *objetos* son claras. Así hemos nombrado la abstracción, la razón que pugna, la generalización o negación de notas, el logos matemático y aún quedaría el juzgar, que no estará presente en esta investigación, como *operaciones cognitivas*, cuyos *objetos* propios serían, respectivamente el abstracto, el concepto, la idea general, la idea pura y el juicio.

Los objetos de cada operación son completos, digamos, realizan la tarea para la que han sido pergeñados de forma perfecta, esto es, en el campo de la inteligencia en que se encuentran no se puede conseguir más que lo que el objeto ofrece.

A esta perfección del movimiento producido por el intelecto en sus operaciones lo llamamos *movimiento inmanente*, noción también procedente de Aristóteles. El carácter que tiene el conocer de movimiento es central en la teoría poliana del conocimiento.

El estatus tan especial que tienen los objetos en el pensamiento poliano también viene conferido por el hecho que *los objetos son en presencia*. Toda la atención del intelecto está en el objeto (y por lo tanto la operación que es su contraparte, no aparece en el objeto ni en la atención).

La referencia para introducir la noción de las operaciones cognitivas, facultades y conocimiento es [Polo, 1996] en el volumen II.

1.2.8. Hábito intelectual, advertencia, insuficiencia, la intención o referencia, la definición-intentada, las notas, pensable

El *hábito intelectual* (de origen, de nuevo, aristotélico) es la otra modalidad de movimiento del intelecto, dónde no se obtiene objeto, sino que se obtiene un conocimiento sobre las propias operaciones en su acción. Por lo tanto no son en presencia. Son importantes porque en esta investigación manejaremos tres nociones fundamentales que se tratan en *hábito intelectual*, para la comprensión de la generalización y el paso al logos, e incluso dentro del propio logos.

El *hábito intelectual* nos muestra, en ocasiones exigiendo centrar mucho la atención, alguna ***advertencia***. Lo *advertido* puede ser de lo más diverso, y fundamentalmente nos muestra las operaciones intelectuales en su operar más que los objetos parejos a las operaciones, o la estructura interna del objeto en tanto que analizada (roto el objeto). La advertencia tiene que ver con lo entrevisto que no puede ser visto de forma permanente ni se atiene a reglas lógicas (lógica en algún ámbito objetual concreto).

La primera noción que es una advertencia *será la de* **insuficiencia**, en la que nuestro objetivo a comprender es la operación de generalización, y así poder ver como podemos conocer más sin seguir generalizando. De forma más general, la *insuficiencia* nos muestra en un ámbito concreto del pensar operativo qué nos queda por pensar, como podemos pensar más, proseguir el pensamiento, quizás en una nueva operación intelectiva, quizás en un pensamiento habitual.

La segunda noción es la de *análisis del objeto idea general* y las nociones derivadas de ese análisis: *el caso* y *las notas*. El *resultado del análisis del objeto idea general* no puede ser un objeto ya que no resulta una o varias ideas generales, sino que lo que resulta es un proceso de entendimiento analítico del mismo. Por otra parte tiene una validez relativa ya que el objeto idea general en cuanto tal, no tiene partes reales: lo rompemos en nociones naturales para ver en su interior, pero la idea general no tiene más interior que ella misma, luego el proceso de análisis no es una comprensión objetiva y no estará legitimado si no llegamos a un puerto que de razón del mismo proceso, y deje la comprensión las ideas generales intacta, tal y como son sin más. Los subproductos (en cuanto a contenidos) de este análisis son *los casos* y *las notas*, que, como veremos, no podemos tener en presencia en ningún momento, esto es, no son objetos de ningún tipo. La idea general es susceptible de ser analizada más allá de *los casos* y *las notas*, como en una aproximación de mayor nivel, o mejor aún, como en un nivel que es la fuente de formalidad en la idea general.

La tercera noción es la de ***pensable***, que resume la idea de intuición y movimiento hacia una nueva operación, su descubrimiento. También la de *advertencia de un objeto de otra operación*, que es la forma en que se presenta en esta investigación. La noción de ***pensable*** hace mención a que se puede pensar pero no es un pensamiento estable, esto es, es contradictorio, hay que superarlo, completarlo hasta que sea algo realmente nuevo y objetivo.

El *hábito* ha de funcionar cerca y en base a una operación, y no en base a otra intuición dada por el propio *hábito*. Caso aparte son *los hábitos de los primeros principios* que no juegan ningún papel en este estudio.

1.2.8.1. Intención, intención primera e intención segunda, referencia, vínculo experiencial

Las nociones de *intención*, *referencia* y *vínculo experiencial* son sinónimas: nos dicen sobre la idea general qué parte de la experiencia es la que nombran. Esto es, se refieren a abstractos y a la acumulación de los abstractos, la experiencia, y nunca a objetos propiamente extra-mentales.

Así, el término más simple es *referencia*. La intención es un término más técnico, más propio del pensamiento poliano, traído del olvido por Franz Brentano y ampliamente utilizado en fenomenología a partir de Edmund Husserl y muy retocada la noción por Polo, tiene dos posibles significados en las ideas generales: *intención primera* e *intención segunda*. La *intención primera* es la que direcciona las ideas generales hacia el abstracto y la experiencia, mientras que la *intención segunda* tiene como significado, básicamente, otras ideas generales. Utilizo el término *vínculo experiencial* como *referencia hacia el cúmulo de la experiencia más que a un abstracto concreto*.

1.2.8.2. Nombrar, definición y definición-intentada

No entraré aquí a especificar qué sea *definición*. Simplemente utilizaremos esta noción en su forma más natural e intuitiva. Lo importante, que se verá en el texto, es que consideramos la *definición pura, exacta*, como algo que no se da más que en el pensamiento formal. El resto de *definiciones* serán *definiciones aproximadas*.

Esto que aquí digo tiene aplicación directa en las ideas generales: cuando digo que las ideas generales son en parte *definiciones* se ha de entender *definiciones aproximadas*, más aún, como las ideas generales son los objetos simples de la generalización, utilizo la expresión *definición-intentada*, dando a entender que la operación de generalización tiene ese cierto propósito de *definir*, pero como esto sólo se daría en un pensamiento puramente formal queda claro que es un *intento*, el mejor posible dentro del pensamiento generalizante, que da de sí todo lo que hace falta para la comprensión del abstracto y otras ideas generales, ya que en esta compresión no se requiere absoluta formalidad, siendo este exceso de formalidad inútil en esa compresión habitual del mundo.

Utilizamos la noción de *nombrar* en relación directa con *el nombrar del nominalismo*. Sin embargo veremos que esta investigación tiene como objetivo encontrar el lugar propio del *nombrar* y que éste será el logos: entenderemos el *nombrar* del nominalismo como el *definir* del logos.

1.2.8.3. Las notas

Se utilizan en un sentido muy parecido al de *definición-intentada*, esto es, serían proto-atributos, proto-propiedades, proto-predicados. Las *notas* no tienen el poder expresivo de los atributos, para comenzar porque forman un cúmulo unitario en el objeto idea-general, sólo si las advertimos aparte de la idea general aparecen como atributos.

Hay gran diferencia entre las *notas* del *abstracto*, indiferenciadas, unidas indisolublemente con el abstracto, y las *notas* de la *idea general*, que también han de estar unidas y soldadas al objeto *idea general*. De hecho, cuando aislamos las notas de la *idea general* lo que aparecen son notas-atributos, notas-predicado que son objetos del tipo *idea general*.

1.2.9. Seguir pensando, prosecución operativa y prosecución intelectiva

Estas palabras se utilizan con frecuencia en pensamiento poliano, y no quieren decir darle vueltas a los mismos conceptos o ideas, al mismo abstracto o juicio o idea pura. Cada objeto operativo está ya perfectamente conocido, luego seguir pensando no es ese objeto, sino más allá de ese objeto y normalmente más allá de esa operación objetivante, moviéndose hacia otra operación nueva. A eso llamamos *prosecución operativa*.

Cuando el *seguir pensando* no tiene continuación en otra operación del pensar, la llamamos en general *prosecución intelectiva*.

La noción de *seguir pensando* es inherente al espíritu del pensamiento de Leonardo Polo, pues su pensamiento intenta siempre salir de círculos viciosos o de caminos que ya han demostrado todo lo que pueden dar de sí.

1.2.10. Noción

Utilizamos la palabra noción para todo aquel pensamiento, más bien intelección, que no es objeto o no pertenece a alguno de los siguientes ámbitos operativos: abstracción, generalización, razón que pugna, logos formal, juicio o fundamento (dónde en la línea de la razón que pugna no podemos proseguir). Las nociones son casi-objetos advertidos por el hábito intelectual y cuajados en casi-objetos (perdiendo buena parte de lo advertido). Una idea general o un abstracto o percepción no son objetos de ninguna operación del pensamiento: son *nociones*.

2. Indicios para una teoría del conocimiento de las matemáticas

Se haya pensado lo que se haya pensado sobre las matemáticas, al final, los múltiples frentes abiertos en las matemáticas nos remiten a una visión global de ellas en las que se explique en la medida de lo posible en qué consisten, cómo la inteligencia puede desarrollarlas, cómo son posibles en cuánto que pensadas por el hombre.

Antes de empezar es importante darse cuenta que las matemáticas tienen un alcance que no solo es el científico, sino el cotidiano y diario. El hombre piensa de forma natural con matemáticas. El contar, el medir, el procedimiento o receta y muchos otros, son objetos matemáticos que se trabajan incansablemente independientemente de si eres Gauss o te consideras un patán al que jamás se le han dado bien las matemáticas. El alcance de una teoría del conocimiento que explique bien las matemáticas no es baladí, es importante no solo en cuánto a la teoría matemática sino en cuanto al pensar humano habitual, a su núcleo mismo.

¿Por dónde comenzar? Por lo más simple. Como en el prólogo de "Palabra y objeto" [Quine, 1960], el comienzo estará en esos objetos cotidianos que conocemos como tales. El conocimiento aquí y ahora [4] de objetos sensibles. A eso lo llamamos abstracto de forma técnica en filosofía poliana. Conocimiento sensible "ante los ojos" en un giro heideggeriano. Este abstracto será en todo momento la última referencia del conocimiento, ya que las sensaciones y percepciones mínimas en cuánto tales no sabemos cómo integrarlas de forma primitiva en el objeto pensado "abstracto"[5].

A partir de ese abstracto tenemos, por un lado, el conocimiento de lo extra-mental, al que remite cada abstracto mismo, que es de más difícil estudio, pero de gran importancia si queremos profundizar de manera más detallada de lo que vamos a exponer, y por otro la generalización, la comparación entre abstractos[6] y el quitar las notas que no coinciden, esto es, la formación de objetos (ideas generales) que no son los abstractos de los que proceden por el acto de negación de notas, o por negación de notas en ideas generales mismas, lo que es de nuevo una idea general. A estos objetos del conocimiento los llamaremos ideas generales (el calificativo que pongo a la palabra idea es de cierta importancia posterior).

La tesis principal es la que sigue:

Existen*insuficiencias* en las ideas generales tales que la única prosecución posible del pensamiento no son más que las *IDEAS PURAS* de las matemáticas.

A esta operatividad del pensamiento, posterior a la generalización, la llamaremos *LOGOS MATEMÁTICO*, cuya novedad intelectiva es la generación explícita y su correspondiente análisis de las diferencias extrínsecas a lo extra-mental.

La primera tarea es evidenciar esas insuficiencias de las que hablamos. Para ello nos fijamos en las relaciones entre las ideas generales y los abstractos y las ideas generales entre sí.

2.1. La idea general y su relación con el abstracto: *advertencias* en la generalización

La idea general resulta de una de las dos prosecuciones posibles una vez actuamos el hábito intelectual (iluminación de la operación, el conocimiento que surge de observar la operación) que se posibilita al abstraer. Al conocer aquí y ahora[7]. Este hábito, que tiene que ver con el darse cuenta que estamos de hecho conociendo el abstracto, nos permite ver que efectivamente hay abstractos distintos entre sí. Estas distinciones pueden ser unas cuantas o más bien todas las que no son comunes a los abstractos considerados. Si llamamos notas a las características que se dan en el abstracto (digamos de forma impropia que ciertos predicados o atributos [8]) el objeto que obtenemos no es ya un abstracto, un conocer aquí y ahora, sino una idea, más concretamente una idea general.

¿Cuál es el estatus de una idea general? Remite a una multiplicidad de abstractos que son lo empírico de la idea general. Es la intención primera de la idea general primaria [9] que estamos considerando: es el caso de las *especies especialísimas* de Porfirio en su Isagoge[Porfirio, 268]. La existencia de estas especies[10] supone, básicamente, que existe una idea general minimal con respecto de cualesquiera que sean los abstractos generalizados. No entraremos en si se dan o no estas especies/géneros minimales por ahora. En el caso de estas *especies especialísimas* quedaría claro que los abstractos concretos desde los que se han abstraído las ideas minimales son precisamente los casos en los que se dan los casos mencionados. Diremos que *estos casos son los que comprehende la especie minimal.* En esta situación, cuando pensamos el género lo pensamos como idea que quiere valer por sí misma, que sea comprensible sin hacer referencia expresa a los casos a los que apuntan. De alguna manera lo que queremos es pensar mejor lo que hay de pensable (teorizante) en esas definiciones intentadas. Por lo tanto, mostraremos que existe una intención del pensamiento de desasirse de lo empírico. Para esto, básicamente, quisiera la inteligencia dar sólo el monto de notas comunes a esos abstractos referidos [11] Esas notas comunes a los abstractos constituirían una definición si fuera una cantidad pequeña de notas, comprehensible de alguna forma, y si además tuvieran cierta ortogonalidad entre sí que nos permita separarlas. La idea general intenta ser definición de esos abstractos de los que procede y diremos que es ***definición-intentada***. A partir de aquí podemos seguir pensando por comparación de ideas generales distintas (o mejor, por negación de notas -quitarlas- en las ideas generales obtenidas), viendo que notas comparten o en cuáles se diferencian. Si decimos solo las que comparten obtenemos una idea generalizante, que su intención primera son las ideas generales de las que procede directamente, y como intención segunda tenemos todos los abstractos que caían bajo cada una de las ideas generales de las que procede directamente [12].

En la relación de intencionalidad (primera o segunda) desde las ideas generales a los abstractos obtenemos que las dos partes de la idea general (idea como *definición-intentada/casos* como abstractos o ideas) son de diferente índole, una es una idea pensable en cualquier instante, esto es, desvinculada de los momentos en que se produjeron los distintos abstractos (actos de conocimiento sensible ahora). Se piensan ellas mismas sin espacio y sin tiempo, mientras que el abstracto está vinculado al *momento* del acto cognoscitivo que articula el tiempo. En la idea general como un todo tenemos la parte superior de la idea que intenta ser definición, algo solamente pensable, y la intencionalidad a lo empírico en el conocimiento.

Sobre esta relación peculiar de la dualidad de la idea general, podemos seguir pensando de forma fructífera. ¿Qué idea general conocemos que sea tan especial que remita solo directamente a algunos casos perfectamente conocidos de los que deriva? En caso que se dé esta idea general (minimal) de, por ejemplo, dos abstractos diferentes y presentes [sic], pueden ocurrir dos cosas con respecto a cada uno de ellos: o bien lo conocemos porque ya conocíamos algún otro abstracto parecido, o bien es tan novedoso que decimos que no lo conocemos, que no sabemos lo que vemos, que no sabemos qué es. En ambos casos el abstracto como tal es bien conocido (no cabe decir que no tenemos el objeto formado en nuestra inteligencia aquí y ahora). Lo que vulgarmente queremos decir al decir cosas así es que o bien ya teníamos géneros/especies/ideas-generales en las que encuadrar el abstracto (aunque en sí esto no es necesario para el abstracto), o bien el abstracto está huérfano por nuestra parte de ideas generales bajo las que encuadrarlas y por eso le daremos un nombre concreto (bien lo inventamos bien lo preguntamos). Esto nos da que pensar que en el proceso de obtener un abstracto la inteligencia echa mano de todo lo ya sabe y puede iluminar lo pre-abstracto. Esto provoca un problema al generalizar desde esos dos abstractos [13]: ya partimos de ideas generales anteriores que conforman parte de los abstractos [14]. En el caso de la escalera de Wittgenstein, no podemos tirar la escalera que nos lleva hasta el abstracto y no podemos tirar la escalera que nos lleva a las ideas generales, es claro que el conocimiento está en continua construcción, que hay que andar bajando escaleras y subiéndolas continuamente para formar el abstracto que es el conocer ante los ojos ahora respecto a la experiencia.

Así que supongamos el caso en que no conocemos ninguno de los dos objetos abstractos. Los vemos como distintos y necesariamente encontraremos aspectos iguales en ambos abstractos, lo que nos obliga a reconocer notas comunes (al fin y al cabo, tienen coordenadas espacio-temporales, las captamos a través de nuestros órganos sensitivos). Ahora tenemos una idea general que llamaré primera. ¿Es esta idea general primera minimal? Esto es ¿remite exclusivamente a esos abstractos de los que deriva? Eso no está asegurado en absoluto. No sabemos si en un futuro obtendremos un abstracto que caiga bajo esta idea general primera. Incluso abstractos básicamente iguales a los ya encontrados, volverían a ser reconocidos como casos de esa idea general primera: serán re-envueltos ya bajo la idea general primera y de esta forma habrían cambiado. En este proceso es claro que la misma idea general no es exactamente la misma en dos momentos distintos del tiempo. Para esto me remito al estudio de Husserl sobre "Fenomenología de la conciencia interna del tiempo"[Husserl, 1928]. Las ideas generales primeras mismas son difíciles de detectar, digamos que solemos poner ejemplos de juguete. Así las ideas generales que hayan sido primeras o minimales (cosas inicialmente distintas) están sujetas a cambio constante, al tiempo interno de la conciencia. Conforme nos alejamos de la idea de minimalidad y de la de primalidad vamos obteniendo ideas generales cada vez más alejadas de lo empírico, del abstracto.

Además ¿es acaso una o dos, o podemos enumerar realmente las notas del abstracto? Y cuando enumeramos algunas de ellas ¿hasta qué punto realmente estas notas son realmente distintas (normales) entre sí? Nada de esto es pretendido en el abstracto. Cuando queremos algo así vamos a ideas muy generales, muy alejadas del abstracto, de la sensibilidad. Las notas son predicados solo muy lejos del abstracto. Pero, aun así, es claro que las ideas más generales que tengamos sin que sean matemáticas no están nunca bien definidas ya que siempre están relacionadas (aunque sea muy débilmente) con el abstracto. En el campo de las ideas que no son matemáticas nunca obtenemos definiciones, esto es, la casi-definición o definición-intentada de la idea general necesita de su complemento que son sus casos, los abstractos a los que remite para quedar realmente completa una cierta definición que no es totalmente lo que pretende. La idea general es una cierta compensación objetiva de ese *intento-de-definición/casos.*

Antes de explicitar más esta insuficiencia veremos cómo, de algún modo, podemos pergeñar qué pasa si desapareciese esa distinción de nivel entre las ideas generales y los casos. Pongamos que tenemos delante varios abstractos (si es que es posible que sean varios a la vez en el tiempo), estos abstractos son encuadrados bajo un cierto género o especie, y en vez de comparar los abstractos simplemente los identificamos (nos abstraemos/olvidamos de sus diferencias propias y entre sí) con esa idea general. Si la identificación es absoluta es porque solo nos interesa ver la idea bajo la que caen. Esto es bastante circunstancial y caprichoso, ya que si caen bajo un género es casi seguro que caen bajo otro inferior o superior en ese orden de generalidades. Pero si solo queremos saber algo más, común al conjunto de todos ellos, que no sea la diferencia interna o entre sí, nos saldrá algo así como *muchos.* Incluso sin fijarnos en más nada nos saldrá algo más: *tres objetos*, *tres abstractos de tal género.* Un *número concreto.* Ante los ojos tenemos una idea general y un número concreto (extremando lo que queremos saber sin contar con las diferencias). En filosofía clásica esto sería lo uno y lo múltiple, debidos a la forma y la materia. Sin embargo, no es eso lo que pretendo ver aquí, sino más bien hacer un análisis más detallado del surgimiento del número como noción de la matemática. Pero aún no hemos llegado al número, sino a una advertencia de él.

Realmente el número no ha surgido más que como multiplicidad presente (al contrario que la forma en que surge en Kant, que piensa que el número ha de ser en el tiempo por sucesividad de la unidad, luego no realmente presente). Faltan muchos detalles que cubrir para que realmente pueda surgir el número en este, aparentemente, sencillo camino.

Por ejemplo, si hemos contado tres objetos, tenemos un pequeño problema: no solo hemos borrado las diferencias entre el género y los abstractos presentados, por ejemplo, en la imaginación. Para contar hemos delimitado previamente que objetos pensar. Si ante un rebaño de ovejas escogemos tres ovejas cercanas en las que nos hemos fijado, hemos demarcado en lo que nos fijamos, lo que contamos. Aunque solo estuviesen ante los ojos esas tres ovejas, el hecho de haber contado en todo el marco que tenemos ante los ojos las ovejas para decir después un número, el tres, es ya una delimitación previa. Sin la delimitación no hay número. Solo multiplicidad. Incluso un solo abstracto es una muestra de la multiplicidad de casos bajo el género. Así que aún no podemos hablar de cómo surja el número bajo la idea general.

De hecho, la delimitación es una curiosa idea general que intersectamos con el género y que nos permite demarcar la multiplicidad bajo el género de forma más fina [15]. En Frege el número se dice del concepto y en Husserl el número solo tiene sentido ante un conjunto o multiplicidad.

2.1.1. Aclaración importante

Desde el principio estamos intentando ver estas insuficiencias pero teniendo siempre en mente que el pensamiento matemático es ya un hecho, algo que hacemos natural e inevitablemente.

Por lo tanto el número aparece de forma natural, diríamos que espontánea. Los conjuntos y las clases también, aunque no seamos muy conscientes de estar utilizándolos en nuestro habitual pensar. Y los números enteros y los racionales y las rectas, los triángulos y demás polígonos, las circunferencias y los puntos. . .

No necesitan ser formalizados para ser pensados como ya definidos, formales: nuestra investigación intenta ver como se forman los objetos del logos, para poder adentrarnos en la matemática como totalidad y para dar razón de ella, dar cuenta de ella desde otras instancias del intelecto, y así integrarlas en un intelecto único, una unidad. Para eso nos guiamos por las últimas formalizaciones, porque el avance de las matemáticas ha sido lo suficientemente claro y penetrante como aprovechar esas formalizaciones. Además el camino que cojo es el que me parece más claro, natural y evidente, y no consigo penetrar otros caminos. Aún así supongo que habrá más y mejores aproximaciones posibles: el presente estudio no es una fundamentación lógico-matemática al uso, sino de una indagación de la matemática en su totalidad. Aún así podremos dar una fundamentación formal.

2.2. ¿Es el caso, acaso, una idea general o un abstracto?

Cuando decimos de un abstracto que es un caso de una idea general, el abstracto mismo no es caso, porque al pensarlo como caso lo asimilamos al género que es la idea general, esto es, nos olvidamos del resto de notas de ese abstracto y lo convertimos en una instancia del mismo género. Además el abstracto no es presente cuando pensamos una idea general, luego no es abstracto. El caso no es más que la intención parcial de un género al abstracto, la referencia, algo intrínseco a la idea general y a la totalidad de nuestra experiencia que cae bajo esa idea. De esta forma, la definición intentada que es la idea general conlleva los casos como sus referencias. Ningún abstracto concreto es un caso propiamente dicho. O mejor, cualquier caso que refiera a un abstracto no es el abstracto sino la referencia o intención adjunta a la idea general bajo la que parcialmente se ilumina lo pre-abstracto. *El abstracto no es nunca un caso de las ideas generales de primera generación.*

¿Y si la idea general lo que generaliza son otras ideas generales? Si esta generalización no es matemática ni de ideas matemáticas, la tesis es que, efectivamente, tampoco estas ideas generales son propiamente casos de la generalización. Hemos visto que las primeras ideas generales no son, por así decirlo, auto-suficientes. No describen lo que pretenden más que haciendo referencia a los abstractos que realmente son su base, esto es, haciéndose acompañar de la experiencia desde la que parten. De esta forma una segunda generación de ideas generales ha de llevar consigo algo de la analogía de generalización acarreada por la primera de las generaciones de ideas generales. Ya que las definiciones de éstas son solo intentadas y las ideas generales de primera generación han de verse acompañadas de la experiencia, esta segunda generación ha de cargar con algo de la experiencia que cae bajo las ideas generales primeras, esto es, también serán definiciones intentadas. A partir de aquí no hay que hacer un argumento de inducción matemática, solo darse cuenta que, si la idea general guarda alguna relación con el abstracto, la idea general sigue siendo necesariamente una definición intentada, esto es, no auto-suficiente. De esta forma, una segunda generación de ideas generales sigue siendo dependiente en su intelección de la experiencia.

Si las ideas generales de primera generación que están a la base de ésta más general fuesen realmente casos, se podría pensar como sin relación con la experiencia sensible acumulada, pero esto querría decir que es definición exacta de ideas generales inexactas, pero no puede haber descripción exacta de lo que es intrínsecamente inexacto. Si lo hubiera, tendríamos además un problema: la experiencia es acumulada y así variada en el tiempo, en cada nueva abstracción. De otro lado, las ideas generales de primera generación dependen también de este flujo re-interpretativo, esto es, que esas ideas generales dependen de ese mismo flujo [16]: ¿cómo una idea de segunda generación va a definir exactamente lo que depende de ese flujo re-interpretativo? Si acaso, solo sería posible si el flujo re-interpretativo se parara, esto es, si parara la abstracción, la experiencia. Luego la definición pretendida de las ideas de segunda generación no son definiciones perfectas de algunas ideas de primera generación, de dónde llevan consigo intenciones referenciales respecto a las de primera generación. Luego estas referencias o intenciones son algo intrínseco a las ideas generales, que terminarán llevándonos a intenciones referenciales a abstractos. De aquí que no haya forma de fijar completamente las definiciones intentadas al nivel de la generalización. El caso de una idea general que no sea de primera generación son unas intenciones referenciales intrínsecas a ideas generales bajo ella y sucesivamente hasta llegar a los abstractos acumulados en la experiencia *El caso de una idea general de generación más alta que la primera no es una idea general y tampoco los abstractos propiamente dichos.*

Los casos son para las ideas generales solo las intenciones referenciales a ideas de menor altura genérica y al abstracto en la experiencia, nunca objetos intelectivos como un abstracto u otra idea general.

Ya tenemos la insuficiencia más clara de las ideas generales. A ella me remitiré diciendo que:

los casos de las ideas generales no comparecen.
(En cuanto objetos no comparecen en sentido estricto).

Pero ¿cuáles son entonces las relaciones entre ideas generales y abstractos? Es claro que, de un abstracto, en cuánto que ya conocido, no requiere de las ideas generales más que como un prisma bajo el que ilumina la inteligencia al pre-abstracto (el fantasma en filosofía clásica). Por otra parte, hemos visto como la idea general siempre lleva consigo una referencia intrínseca que llamamos intención a la totalidad de la experiencia en general y a alguna de esa experiencia en particular, a los abstractos desde los que generaliza. Ídem podríamos decir de la totalidad de nuestras ideas generales y en especial desde las que se generaliza. Estas intenciones son fuertemente in-analizables, y caen bajo el hábito del lenguaje como tal. ¿Qué relaciones podemos ver entre ideas generales? No pretendo explicar todas las relaciones. Solo nos bastará con la más aparente.

Suponiendo un solo sentido en la generalización, obviando la modalidad y la temporalidad en tanto que sucesividad, solo me fijaré en la generalización de abarcar más, esto es, en si se aumenta o no la referencialidad de las ideas generales junto con el debilitamiento de ese vínculo: esto irá inversamente relacionado con las notas de la idea general, si la idea abarca más tendrá menos notas, si abarca menos tendrá más notas. Diremos que *una idea general A generaliza a otra B , si para todo caso que cae bajo B tenemos que el caso cae bajo A* [17].

Directamente sacado de lo anterior: *una idea general A generaliza a otra B , entonces tenemos que todas las notas de B las tiene A.*

Supongamos ahora que todas las notas de A las tiene la idea general B. Entonces todos los casos de B cumplen con las notas de A, luego están en A, luego A generaliza a B [18].

Esta relación, la generalización entre ideas generales, tiene la virtud de que no necesita hacer comparecer de forma explícita al caso, quedando como una relación exclusivamente entre ideas generales.

La notación que utilizaremos será la de $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{B\}$ (leído como A generaliza a B) y la de $\{B\}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar\_a}\,\{A\}$ (leído como B es sub-idea (particulariza a) de A), que son claramente intercambiables.

Claro que aún queda por ver si realmente existen ideas generales minimales y/o de primera generación o primas o las que llamaremos primarias.

Diremos que la idea general A es minimal si no admite que otra idea distinta B sea una sub-idea general propia, $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{B\}$ y hay algún caso de A que no está en B [19]. Más aún, podríamos hablar de la idea máximamente particular de todas las demás ideas (o mínimamente general) [20].

Diremos que la idea general A es primitiva o prima (de primera generación) si procede de la abstracción neta y directa de algunos (bien definido el algunos) abstractos $a, b, \ldots$ [21]: en fórmula decimos $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{a, b, \ldots\}$.

Diremos que la idea general A es primaria si procede de la abstracción neta y directa de algunas (bien definido el algunas) ideas generales $B, C, D, \ \ldots$ incluso también de algunos (bien definido) abstractos $a, b, c, \ \ldots$, en fórmula $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{B, C, D, \ldots, a, b, c, \ldots\}$ [22].

Primero veremos que *no existen ideas generales minimales*. Sea B una sub-idea de A, esto es, todo caso que cae bajo B es un caso que cae bajo A. Si esta relación es de tipo minimal quiere decir que existe una única nota en B que no está en A. En caso contrario cabe una tercera idea entre ambas y la relación de ser sub-idea ya no es minimal. Pero hemos visto que una nota no es algo simple y aislable, no es un predicado propiamente dicho y menos aún ortogonal [23] (independiente) con otras notas. Una nota vista como simple [24] y ortogonal con las demás es lo que Descartes llamaría una idea clara y distinta, incluso más, como una idea atómica. Llamaremos a esa nota a. Pero vista así, como clara y distinta es una idea general, un predicado. Tendríamos netamente B *es lo mismo que* $A\backslash a$ [25]. *A generaliza exactamente a B y a a.* Pero esa exactitud es la que no tienen las ideas generales (es la vieja fórmula, que no admitimos dentro de la operatividad generalizante, definición es género mas diferencia específica). Luego no tiene sentido hablar de una sola nota y tampoco de relación de generalización minimal [26].

Veamos que *no tiene cabida la primariedad (y por lo tanto la primalidad) en las ideas generales.* Si una idea general es generalización neta y directa de una serie de ideas generales y de abstracciones quiere decir que hemos podido (en un paso) quitar una serie de notas, en cada una de las abstracciones habrían de ser diferentes. Deberíamos de tener una serie de notas para una de las ideas/abstracciones primigenias, otra para otra, y así sucesivamente para cada una de ellas. Ese quitar sería neto, explícito. Ya que es un solo paso lógico, nos obliga a manejar mono-notas. Pero sabemos que esas mono-notas o notas atómicas o claras y distintas solo tienen sentido si son definidas perfectamente. Eso es lo que no tenemos en las ideas generales.

Aún queda ver un concepto más, inverso de los anteriores: el de maximalidad. Una idea general A es maximal respecto a otras $B, C, D, \ldots$ si no cabe otra idea A' tal que A cubra algún caso que no cubre A' y A' generaliza $B, C, D, \ldots$ exactamente como A [27]. Aún más, podríamos hablar de la idea máximamente general respecto de todas las ideas generales [28].

Pues bien, no es muy difícil ver que la idea máximamente general del pensamiento no es más que la idea vacía de notas. Esta idea para ser máximamente general ha de haberse quedado sin nota alguna, y solo dice ***toda mi experiencia***. Pero no existe una idea general que resuma *toda mi experiencia* [29] como idea general, al pensarla según las notas no aparece ***nada***, aunque al pensarla según la intención dice***todo***. Como idea general no tiene cabida ya que no tiene notas, de la misma forma que admitiéndola, al ser máximamente general, *su auténtico vínculo con la experiencia ha de ser nulo, de dónde dice realmente* **nada/nada** *(por la pérdida del vínculo intencional) queriendo decir* ***todo***. No niego su pensabilidad, pero nunca como un objeto o una idea general [30].

Tampoco es difícil ver que una idea máximamente particular del pensamiento no es más que la idea vacía de casos. Esta idea para ser máximamente particular ha de haberse quedado sin caso alguno, y solo dice *nada de mi experiencia.* Pero no existe una idea general que resuma *nada mi experiencia* [31] como idea general, al pensarla según las notas pueden aparecer ***todas las notas***, aunque al pensarla según la intención dice ***nada***. Como idea general no tiene cabida ya que no tiene casos, de la misma forma que admitiéndola, al ser máximamente particular, *su vínculo con la experiencia ha de ser nulo, de dónde dice realmente* **nada/nada** *(por la pérdida del vínculo intencional en las notas, ya que éstas son procedentes de la experiencia) queriendo decir* ***nada***, *concordancia que no se daba en la idea máximamente general.* Es un pensable, pero nunca un objeto o una idea general [32].

La inexistencia de ideas maximales (minimales) respecto algunas otras, depende de nuevo de la no saturación [33] de la relación de *implicación* o de *ser sub-idea de* o de *ser generalización de* entre ideas generales.

Las ideas generales en su relación de generalización no tienen *relaciones saturadas*, esto es, entre dos ideas generales, que una contiene a la otra, cabe siempre alguna otra idea general que es intermedia. No es aplicable la lógica proposicional ni de predicados de manera estricta entre una idea general y lo que generaliza, ya que en ningún momento tenemos la demarcación exacta de una idea general, ni lo que generaliza estrictamente, y por lo tanto todo lo que hay de más y de menos en una idea que en otra [34]. Solo tenemos que una idea generaliza o expande a otra.

3. Explicitación de la extensión basada en ideas generales

Las insuficiencias antes mencionadas son susceptibles de explicitarse mejor, atendiendo a las relaciones entre los dos aspectos fundamentales de la idea general.

Lo primero, es no perder de vista que la idea general es básicamente un objeto de perfecta unidad interna, que nos proporciona un conocimiento unificador de la experiencia, en ideas generales, nos permite pensar la experiencia de la forma mejor posible. Entonces, las insuficiencias encontradas tienen que ver con el análisis de la idea, su descomposición en facetas (no explícitas en la el objeto idea general mismo, ni siquiera real para la idea general) y su vuelta a integrar, pero esta vez como un objeto que no tiene facetas en su análisis, que nos llevará a integrar distintos aspectos, de alguna forma queremos llegar a un objeto simple inanalizable. Y aún no sabemos ni hemos planteado que es lo que esta nueva operación con su nuevo objeto nos trae de nuevo conocimiento, que no puede ser una mejora de la idea general, ya que ésta realiza su cometido con perfección, de manera acabada y sin resquicios.

Si hago esta aclaración es por no llevarnos a confusión en lo que estamos haciendo de una parte, y de la otra atacar el análisis de las insuficiencias de manera fructífera.

Bien. Las dos facetas encontradas en la idea general son, de una parte las notas de la idea, de otra los casos de la idea. Si analizamos cada una de las facetas independientemente entramos en el problema que supone analizar nociones que no son objetos o que no proporcionan unidad cuando volvemos a intentar hacerlas encajar en el objeto original. Así que el análisis no será completo [sic] hasta que no analicemos la concordancia de las facetas en todas sus formas posibles. De todo esto podemos inferir una nueva lógica, que *será la lógica del logos.*

A su vez, otra posible confusión al leer esta investigación es creer que estamos construyendo un nuevo pensar, *el logos unificante*, pero esto es absurdo, ya que el logos existe en nosotros sin necesidad que nosotros lo construyamos. Lo que en todo momento hemos de tener como prioridad en nuestro pensamiento es ¿cómo pasa el intelecto de un campo de operaciones al otro campo de operaciones? Los indicios que seguimos son uno de los múltiples caminos posibles entre los indicios que allanan el camino de un lugar del pensamiento al otro. Para nosotros lo importante es encontrar uno de ellos, para hacer teoría del conocimiento del logos en ese camino encontrado. Aún así intentaré justificar este camino que aquí cogemos frente a algunos otros intentos o posibilidades.

3.1. La modalidad de la intención en una idea general

Antes de seguir por nuestro camino, saltando desde la generalización al logos matemático, hay algo que nos va a molestar y que en esta primera aproximación al logos no vamos a tratar: las modalidades de la intención de la idea general. Las intenciones primeras que son los casos en los abstractos acumulados como recuerdos y distintos conocimientos construidos, así como las intenciones segundas que hacen referencia a las ideas desde las que se generaliza.

De nuevo, estas intenciones son indisolubles de las notas y los casos en la realidad unitaria de la idea. Sin embargo nosotros la advertimos como una cofaceta, con una cierta realidad mental.

Como no vamos a tratar en esta primera versión de las ideas puras las insuficiencias de las modalidades de la intención, las presentaremos pero no haremos más que una maniobra sugerida para obviar los aspectos de la intención.

Supongamos que tenemos dos ideas distintas, pero no por sus notas ni por sus casos, sino por ciertas modificaciones de segundo grado, en las notas, dando una cierta modificación de éstas que no las cambian en lo fundamental, pero si lo suficiente para decir que el modo de las notas en una idea y la otra es distinto, o en los casos, modificando la intención no en su remitir a casos sino en cómo se remite a los mismos.

Ahora pensemos en el vínculo entre la dos ideas generales y sus casos (que son los mismos). El problema viene desde el modo de esas intenciones. Hay formas distintas de vincularse a los casos.

Para que dos ideas distintas pero con las mismas notas y casos varíen en la forma de vinculación de sus intenciones, ha de haber un cierto acuerdo entre el modo de las notas y el modo de los casos. Digamos que las categorías aristotélicas son un ejemplo de ello. Si decimos los colores, podemos considerarlos en sí mismos, como sensaciones variadas que se presentan a la vista y que atienden sólo a la longitud de onda, esto es, a su color, atendiendo solo a sí mismos, considerados por sí mismos, por ejemplo en la frase ¿cuántos colores conoces o sabes diferenciar? o podemos considerarlos como accidentes, esto es, inhiriendo en otros objetos de la experiencia, por ejemplo en las superficies o las fuentes de luz, por ejemplo en la frase ¿cuántos colores has visto en toda tu experiencia? Tendremos los mismos casos y las mismas notas de los colores, también las mismas notas, pero las intenciones han sufrido ciertas modificaciones.

¿Cómo superar esta diversidad de ideas con las mismas notas y casos? Obviando los modos. Para esto asimilamos ideas con las mismas notas y casos a un equivalencia de ideas. Sobre estas clases de equivalencias será sobre la que trabajemos para conseguir saltar hasta las ideas puras.

Para denotar la extensión de un conjunto de ideas que tienen los mismos casos y las mismas notas llamaremos a la idea A por la idea-extensa o extensión-nombrada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, al caso a por el caso-nombrado $\mathfrak{a}$, y a la nota φ por la proposición $\boldsymbol{\varphi}$. Los casos de una extensión $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ serán denotados por ${}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y sus notas por${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de forma que una idea-extensa o extensión-nombrada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ como la llamaremos más adelante queda completamente acotada y definida por ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y ${}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, de forma que $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *sea plenamente intercambiable por* ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ **junto a** ${}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Hasta ahora hemos dicho que si una extensión $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es generalización de las extensiones $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ notamos como $\{\mathcal{A}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}$. Llamaremos a todas las generalizaciones de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ como $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\boldsymbol{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}$ y que $\mathcal{A}\varepsilon\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\boldsymbol{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}$ y se lee $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es una de las generalizaciones de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$.

A su vez si $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es una extensión que particulariza a $\mathfrak{B}$ y a $\mathfrak{C}$,hasta ahora $\{\mathcal{A}\}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}$, diremos que las particularizaciones de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ son simplemente $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\boldsymbol{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}$ y que $\mathcal{A}\varepsilon\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\boldsymbol{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}$.

3.2. La faceta de las notas de una idea general

Desde el principio hemos dicho que las ideas generales provienen del abstracto, en el intento de proseguir pensando, y para esto cogemos las notas del abstracto menos algunas. El nuevo objeto, no tiene implícito alguno (de realidad extra-mental), sino solo una serie de notas. Hasta ahora hemos visto la relación de generalización entre ideas generales, que atañen a las ideas generales como objetos unitarios. Esta relación en sí misma nos sugiere un orden (parcial) entre las ideas generales. Este orden ha de ser un pseudo-orden, o casi un orden si queremos, pero este orden no pasa de ser una especie de modelo que se parece a la relación entre ideas generales.

¿Qué relación tiene el orden sugerido en las ideas generales, o mejor, la relación de generalización de las ideas generales con las notas de esas mismas ideas generales?

La primera sospecha es que las notas de las ideas (y del abstracto), al calificarlas de atributos, son notas atribuidas a algún objeto como la idea general, o a alguna faceta de la idea general como los casos. Pero esto es un error. Las notas no son predicados de la idea, ya que son intrínsecas a la idea. La idea no es sin las notas de la idea. Las notas de la idea, en la medida que hemos eliminado muchas desde las que había en el abstracto u otras ideas, hacen aparecer el espejismo consistente en que definen la idea. Constituyen lo que anteriormente he llamado la definición-intentada. Pero definir es definir un objeto, y las notas de una idea-general no son un objeto, pues forman una unidad con los casos referenciados/intentados por la idea. La idea general no es lo suficientemente clara para poder definir, definir no está entre sus competencias, no ha sido pensada para definir: si esto fuese cierto, desde una especie concreta, definiríamos un género, y con las notas de ese género, quitándole las de la especie de la que partimos, y obteniendo las notas exactas que están en la especie y que no están en el género obtenemos otra idea que sería la diferencia específica. Ahora podríamos decir que la definición de una especie es la del género más la definición (yuxtaposición) de la diferencia específica. Pero sabemos que esto rara vez (por no decir nunca) ocurre. Siempre encontramos una especie construida de la que es género él mismo de la especie de partida, pero que es especie del género del que partíamos. No podemos recuperar la especie original desde sus generalizaciones y diferencias específicas. Y esto es fundamental. No son definiciones. Las notas no constituyen definiciones. Las notas no son predicados. Las notas no son objetos ni individualmente ni en su colección adherida intrínsecamente a la idea general. Las notas no pueden ser individuales. Las notas no son mono-notas, no son claras ni son distintas, no son ortogonales entre sí. No podemos contarlas, numerarlas ni hacer ningún tipo de operación con ellas al margen de lo que hacemos con las ideas generales. Sin embargo tomando en cuenta la operación de generalización podremos advertir cómo hacer de las notas de una idea algo parecido a un predicado.

¿Qué pasaría si intentamos razonar (hacer una nueva lógica) en la que la idea coincida exactamente con las notas? Para esto necesitaríamos suponer que existen notas que ya son predicados, esto es, que son extraíbles de alguna forma de las notas intrínsecas a la idea. Tendríamos que ver la relación entre ellas (todas las notas como un gran predicado asociado a la idea general y el predicado simple extraído de éstas últimas de alguna forma, que llamaremos, a falta de mejor nombre, deducidas o derivadas). Si las notas de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ son ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ [35] y $\boldsymbol{\varphi}$[36] es una de ellas o se deduce de ellas, decimos ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}} \vdash \boldsymbol{\varphi}$ [37]. Estas nociones con sus denotaciones no son predicados, ya que no tenemos objetos de los que predicarlos.

Pero a partir de aquí podemos desarrollar un cálculo de proposiciones que coincide con la silogística aristotélica, aunque un poco ampliada (en la forma de un álgebra de Boole). Por lo dicho hasta ahora, tiene que quedar claro que este cálculo no puede ser aplicado a las ideas generales con propiedad ni con exactitud, aunque sea aplicado de forma aproximada habitualmente con completa satisfacción. Para esto tendríamos que hacer coincidir la idea general con las notas de esa idea. Aún después podemos llegar un poco más allá afirmando la existencia (y haciendo de las notas un elemento separable de las notas de una idea), y después de esto, habremos pasado de las notas a las proposiciones. Aquí el primer paso es asimilar las ideas generales (sus extensiones) a las proposiciones. Es interesante ver que por este camino habremos conseguido un pensamiento de tipo objetivo.

Ahora hablaremos de las extensiones (ahora proposiciones) por sus notas (ahora también proposiciones). La relación entre dos ideas propositivas en la que una es generalización de la otra será definida por la relación de implicación formal, e igualmente la igualdad entre ideas propositivas.

3.3. La faceta de los casos de una idea general

La insuficiencia de los casos es la más clara, y la hemos tratado bastante anteriormente. Sin embargo tenemos que indicar qué es lo que podemos hacer, que parece indicarnos la insuficiencia encontrada para superar el pensamiento generalizante.

Ahora bien, lo que nos queda es intentar igualar la idea con sus casos y ver que les ocurre a los casos con la relación natural entre ideas generales que es la generalización. A partir de aquí la tarea es fácil: hacemos de la idea general la extensión sobre sus casos y desarrollamos un cálculo de extensiones, esto es, un cálculo no exactamente lógico, sino parecido al conjuntista.

El mundo que se nos abre aquí es el mundo dónde aparecen las operaciones básicas sobre conjuntos de individuos. Pero claro, estos individuos ya no pueden ser casos si queremos llegar a un pensamiento que supere la insuficiencia advertida. Los individuos particulares han de ser tan definibles como las extensiones. Así conseguiremos de nuevo un pensamiento objetivo.

Aflorarán nuevos signos como por ejemplo el de pertenencia, $\in$, que indica que el elemento a la izquierda del signo es un caso (ahora elemento) de la extensión a la izquierda del mismo. Podremos definir la relación de generalización con solo la relación de pertenencia, y la igualdad de extensiones mediante las generalizaciones (ahora inclusiones).

3.4. La integración de las dos facetas principales de la idea general

Aquí es dónde arrancará la parte más fuerte del salto al logos.

¿Cómo podemos aunar en un solo objeto las notas y los casos siguiendo el esquema marcado por la generalización? Recordemos que primero hemos hecho que coincidan las notas con la idea-extensa (evidentemente ya no se trata de notas ni de la idea general sino una aproximación a la proposición lógica y su cálculo). De otra parte hemos aunado los casos con la extensión (claramente ya no son ni casos ni ideas generales, sino una aproximación a las colecciones de definiciones que son definidas por enumeración o extensión).

A la vista de lo anterior, si queremos aprovechar lo ya ganado, tendríamos que hacer una identificación entre notas y casos (que ya no serán notas ni casos sino una aproximación a los predicados extensos).

¿Cómo hacer esto? No es difícil pues el camino ha venido allanado por las anteriores creaciones. Antes, las notas de una idea no predicaban de nada, ya que se trataban como objetos terminados, pero ahora se pueden predicar de los casos (que ahora serán los conjuntos y sus elementos). Nace la lógica de predicados. Las definiciones serán ahora definiciones de conjuntos por sus elementos, que a su vez cumplirán ciertos predicados. Una extensión será ahora el predicado que cumplen todos y cada uno de sus elementos. Aparecerán nuevos signos, los cuantificadores, $\forall$ y $\exists$, al ritmo de la demarcación de sub-extensiones de casos por predicados y caracterizaciones de extensiones.

Podría ocurrir que dos ideas generales A y B distintas cayeran sobre los mismos casos. Si fuesen idénticas, obligaría a tener sus respectivas intenciones bajo los mismos modos en la forma de generalizar y ya hemos apuntado que la amplitud no tiene porqué ser el único factor al generalizar.

Si nos abstraemos del modo y otras relaciones sutiles incluidas en la generalización de forma similar, podemos agrupar todas las ideas generales con la misma amplitud y las mismas notas en una sola idea que llamaremos extensión (y que no puede ser ya una idea general) [38]. Que pueda existir la demarcación exacta de la que hablamos es ya un paso que nos aleja del mundo de las ideas generales. Llamaremos extensión a todas las ideas generales que caen sobre los mismos casos y tienen las mismas notas. Una extensión es una (pretendida o indiciada) equivalencia entre ideas generales.

¿Podemos distinguir de forma clara entre extensiones? Claramente sí: más aún si hacemos un filtro para las ideas generales admisibles en las extensiones. *Este filtro (* de géneros con interior no nulo*) consiste en solo poder considerar ideas generales admisibles para la extensión, las que solo refiriesen de forma segura, esto es, que cualquiera podría decir que dado un caso es bien bajo esa idea, bien no es bajo esa idea.* A estas ideas generales las llamaremos ideas generales *con interior no nulo*. Una idea *con interior nulo* la llamaremos *idea frontera* y la asimilaremos a la *extensión de contenido nulo* (sin casos, esto es, contradictorias, con intención referencial al pensamiento de **lo máximamente particular**[39]).

Dos extensiones son distintas si hay casos distintos bajo alguna de sus ideas generales equivalentes. Dado que el caso no comparece, e incluso puede ser una intención distinta bajo algún aspecto, esto sería un paso que nos saca de las ideas generales propiamente dichas. Luego no es una generalización propiamente dicha. *La intención no es un objeto, por lo que como tal ha sufrido la siguiente transformación:* **es una intención que llamaremos virtual porque solo se da en las ideas generales concretas y no en las extensiones de forma propia**. Bajo esta nueva noción, *pensable*, las extensiones ordenan aproximadamente las ideas generales bajo una relación de equivalencia aproximada. Si dos extensiones contienen alguna idea general común, las dos extensiones son, *ipso facto, la misma* (estamos abstrayendo en este nivel la realidad pensada de las intenciones de las ideas generales).

3.5. Indicios de la relación de equivalencia en la generalización ateniéndose a los casos

Vamos a ver que si en la relación de generalización se produce algo parecido a una relación de equivalencia si nos atenemos a los casos sobre los que caen los géneros igualados. Para esto hace falta que se den las relaciones reflexiva, simétrica y transitiva. La equivalencia "parte" las ideas generales según su extensión de casos. Esto nos permitirá profundizar más en este indicio.

3.5.1. Reflexiva de la equivalencia sugerida por equi-extensión sobre casos de las ideas generales

Toda idea general A cae sobre los mismos casos que ella misma, luego $A \simeq A$. Esto es quizás lo más claro de todo.

3.5.2. Simetría de la equivalencia sugerida por equi-extensión sobre casos de las ideas generales

La *simetría* de la relación está asegurada, ya que lo mismo es que los casos que caen bajo A caigan bajo B, abreviándolo, $\{B\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{A\}$, que los casos que caen bajo B caigan bajo A, $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{B\}$ ya que $A \simeq B$ es idéntico a $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{B\}$ y $\{B\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{A\}$.

3.5.3. Transitiva de la equivalencia sugerida por equi-extensión sobre casos de las ideas generales

La transitividad se ve fácilmente: si la idea general A cubre los mismos casos casos que la idea general B ($A \simeq B$) y B cubre los mismos casos que C ($B \simeq C$), entonces los casos cubiertos por A son los mismos que los cubiertos por C ya que ambos cubren los mismos que B, luego $A \simeq C$.

No podemos decir que la relación $\simeq$ *parta* a las ideas generales, para comenzar porque esta relación de equivalencia, al abstraerse del modo de la intención y demás factores, al considerar una intención virtual y no pensada actualmente, no puede ser un objeto, sino más bien una especie de intuición primitiva que si la objetivamos no tiene realmente ideas generales ni casos. Guardamos una intención, pero ésta es virtual. El tener ideas generales o casos es en realidad solo el tener en cuenta la relación de contención olvidando los casos.

3.6. Indicios de la relación de orden sobre las extensiones, centrada en la generalización, ateniéndose a los casos

Básicamente vamos a ver que la relación de contención entre ideas generales parece entretejer una relación de orden (evidentemente es una analogía con la relación matemática) que ordena las ideas-extensas entre sí, entrevista en la propias ideas-generales. Este orden en las ideas generales es muy complejo, y tan denso que difícilmente podemos entresacar y distinguir unas ideas de otras. A su vez, esta relación de orden es posible (y viceversa) por la relación de equivalencia (de nuevo es una analogía) que se da entre las ideas generales que tienen los mismos casos, siempre que podamos hablar de distintos casos en una idea general, que como hemos visto, es algo, de nuevo, complejo o difícil de afirmar. Denotaremos el pensable que los casos que caen bajo A son exactamente los mismos que caen bajo B ($A \simeq B$) como $\boldsymbol{\mathcal{A}} \equiv \boldsymbol{\mathfrak{B}}$ (serían las clases de equivalencia tomando como representantes bien A o bien B).

3.6.1. Reflexividad del orden sugerido en las ideas-extensas

Por una parte, es claro que se trata de una relación netamente reflexiva: para toda idea general, de forma trivial, todo caso que cae bajo ella, vuelve a caer bajo ella, al menos si no distan mucho en el tiempo la consideración de las ideas generales entre sí: partiendo de $A \simeq A$ podemos decir $\{A\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{A\}$. Dicho de las ideas generales, dicho de las ideas-extensas.

3.6.2. Anti-simetría del orden sugerido en las ideas-extensas

La siguiente propiedad es la de anti-simetría. Veamos esto más claramente. Pongamos que $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\boldsymbol{\mathfrak{B}}\}$ y que $\{\boldsymbol{\mathfrak{B}}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\boldsymbol{\mathcal{A}}\}$. Esto solo podría ser así si caen los mismos casos igualmente bajo las ideas generales de una extensión que bajo las de la otra, esto es, $A \simeq B$. Como todo aspecto que no sea la intención o caso ha quedado al margen, solo queda $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *es* $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ que es, en lenguaje más formal, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}}$.

3.6.3. Transitividad en el orden sugerido en las ideas-extensas

$\{\boldsymbol{\mathcal{A}}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\boldsymbol{\mathfrak{B}}\}$ y $\{\boldsymbol{\mathfrak{B}}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\boldsymbol{\mathfrak{C}}\}$ que cualquier idea general de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ tiene todos sus casos bajo cualquier otra idea general de $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$, y a su vez bajo las de $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ respecto las de $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$. Es exactamente lo mismo que decir que $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\boldsymbol{\mathfrak{C}}\}$. Se puede inferir lo mismo para las ideas generales, pero es menos claro, ya que en las ideas generales no tenemos las posibilidades de precisión que en las ideas-extensas tenemos.

Cualquier camino ascendente de ideas-extensas nos da un orden total. Como ya hemos visto que las ideas generales no tienen *saturación* entre ellas en la relación de generalizar, tampoco habrá saturación entre extensiones. Llamaremos a esta propiedad *densidad general* [40].

Bien, hemos dado un primer paso para superar la idea general. Los casos son virtuales. Ha heredado la relación de ser sub-extensión o super-extensión y de otra parte podemos aplicar algo que tiene toda la pinta de ser una igualdad cercana a la matemática. Cómo es esto posible, esto es, como la inteligencia da este salto, que aún no es completo, no lo trataremos aquí [41].

3.7. Las notas desgajadas de la idea general y en las extensiones

Se trata de ver qué ocurre con las notas de las ideas generales y qué parece indicarnos al hilo de la relación de generalización de éstas. Si φ es una nota de A diremos que $\boldsymbol{\varphi}$ una nota-nombrada de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Si $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ generaliza a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\{\mathcal{A}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\mathcal{B}\}$, quiere decir que $\boldsymbol{\varphi}$ es una nota de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Esta relación de notas de una idea o caso con los casos o ideas se guarda de las ideas para las ideas-extensas, ya que los casos virtuales de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ han de tener las notas-nombradas de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y algunas más si $\boldsymbol{\mathcal{A}} \neq \boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Para comenzar pensaremos la idea general más general de todas y también la más particular posible. Éstas, claramente, no son ideas generales en cuanto que objetos de la generalización. Por lo tanto tampoco pueden aparecer como extensiones pues no pueden provenir de ideas generales. Ya vimos que precisamente no hay ideas generales exactamente de un abstracto o de dos. Mucho menos un particular puro, algo así como una idea general que no tiene intención, solo la operación de pensar vacía de contenido (esta noción es la de algo, lo mínimo pensable, con la que empieza su recorrido Hegel). Nombraremos a este pensable como $\boldsymbol{\Lambda}$. A su vez, el punto de llegada de Hegel sería el todo, en tanto que pensamiento que incluye todo lo pensable y por lo tanto lo que es, el Absoluto. A este pensable, la más general de todas las nociones, la denotaremos por $\mathbf{V}$.

Tener todas las notas-nombradas (posibles, propias de todas los géneros juntos) de un caso-nombrado o idea-extensa es un pensable que denotamos por $\bot$. No tener ninguna nota en absoluto de un caso o idea es un pensable que denotamos por $\top$.

Recordamos que denotamos a las notas propias de una idea-extensa $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ como ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

De acuerdo con los dos párrafos anteriores tenemos que ${}^{\boldsymbol{nt}}\mathbf{V}$ queda como *lo mismo* que $\top$, y que ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\Lambda}$ queda como *lo mismo* que $\bot$.

3.7.1. Derivaciones o ser una de las notas de una idea

Si describimos casos-nombrados de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ o sub-extensiones de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\varphi}$ es una de esas notas-nombradas de $({}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}})$ diremos que ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}} \vdash \boldsymbol{\varphi}$, y que $\left\{{}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\varphi}\right\} \vdash \top$.

En el párrafo precedente simplemente hablamos de las notas de una extensión, denotándolas de una determinada manera. El haber denotado una nota independiente, solo inferida, es un paso que en las ideas generales no nos está permitido dar. $\boldsymbol{\varphi}$ tendrá sentido sólo si existe una extensión $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ tal que $\{\mathcal{B}\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\mathcal{A}\}$ tal que ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{B}} \vdash \boldsymbol{\varphi}$ y también que $\boldsymbol{\varphi} \vdash {}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

De otro lado la igualdad de notas la denotaremos por $\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}$ y la definimos como $\boldsymbol{\varphi} \vdash \boldsymbol{\psi}$ a la vez que $\boldsymbol{\psi} \vdash \boldsymbol{\varphi}$. Esto nos da la posibilidad de intercambiar ambas notas indiferentemente.

Igualmente, $\{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \varphi\} \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ y a la inversa.

Vamos a considerar el silogismo clásico y de que sentido es inferido. Consideremos que la idea $\mathcal{A}$ generaliza a la idea $\mathcal{B}$ y que $\mathcal{B}$ generaliza a la idea $\mathcal{C}$. Sabemos por el orden sugerido anteriormente en las extensiones junto con sus notas, que $\mathcal{A}$ generaliza a $\mathcal{C}$. Pues las notas-nombradas de $\mathcal{A}$ han de ser notas-nombradas de $\mathcal{B}$, y estas han de ser notas-nombradas de $\mathcal{C}$ (transitividad del tener notas).

Siempre que $\{\mathcal{A}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{B}\}$ decimos que ${}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{B}$. Queda entonces que si $\{\mathcal{B}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{C}\}$ lo que se dice es que ${}^{nt}\mathcal{B} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{C}$. Y por el orden de la generalización antes expuesto, $\{\mathcal{A}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{C}\}$ que nos lleva a ${}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{C}$. Ésta es la ley de transitividad de la implicación silogística:

$$\left\{{}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{B}, {}^{nt}\mathcal{B} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{C}\right\} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{C}$$

El signo de "entonces" ($\Rightarrow$) puede codificar esa implicación que se da en el silogismo, y lo llamaremos implicación material siguiendo a Russell, y al signo se deriva que o es una nota de ($\vdash$) lo llamaremos implicación formal. Nosotros analizaremos el silogismo material poniéndolo en función de la disyunción ($\vee$) y la negación ($\neg$).

Dada la definición que se acaba de dar, está justificado decir, ${}^{nt}\mathcal{A} \vdash {}^{nt}\mathcal{A}$ o en su versión material ${}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{A}$. Es el principio de mismidad para las notas-nombradas de las extensiones. Más adelante volveremos sobre él.

3.7.2. Introducción de la negación como operación sobre las notas-nombradas

Dada un extensión nombrada $\mathcal{A}$, tenemos su notas-nombradas ${}^{nt}\mathcal{A}$, la operación sobre las notas que llamamos negación, $\neg{}^{nt}\mathcal{A}$ supone la existencia de una extensión-nombrada, $\mathcal{B}$, tal que la única generalización (prolongada a pensables) de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es $\mathbf{V}$ ($\mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} \equiv \mathbf{V}$), y la única particularización de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es $\mathbf{\Lambda}$ ($\mathcal{P}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} \equiv \mathbf{\Lambda}$). A las notas de esa extensión supuesta, $\mathcal{B}$, las denominamos $\neg{}^{nt}\mathcal{A}$. De esta primera caracterización aparece la primera de las propiedades de la negación: $\neg\neg{}^{nt}\mathcal{A}$ no puede ser más que ${}^{nt}\mathcal{A}$, de forma que debe existir una extensión $\mathcal{C}$ tal que $\mathbf{V} \equiv \mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} \equiv \mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathcal{B},\mathcal{C}\}$ y $\mathbf{\Lambda} \equiv \mathcal{P}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} \equiv \mathcal{P}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{B},\mathcal{C}\}$. Como aún no hemos avistado otras operaciones no podremos formalizar la unicidad en este caso, pero no es difícil ver que $\mathcal{A}$ junto a $\mathcal{B}$ consisten en la totalidad de $\mathbf{V}$ y no hay particularización posible entre ambos. De esta forma, se da la mismidad de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} &{}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg{}^{nt}\mathcal{A} \\ &\neg\neg{}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathcal{A} \\ &\neg\neg{}^{nt}\mathcal{A} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathcal{A} \end{aligned}$$

Ahora podemos dar una de las condiciones de la condición de pensabilidad de la negación fácilmente:

$$\left\{{}^{nt}\mathcal{A}, \neg{}^{nt}\mathcal{A}\right\} \vdash \bot$$

La afirmación que define la negación la expresaremos de forma algo más compleja:

$$\mathfrak{C}\varepsilon\mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A}, \mathbf{V} \setminus \mathcal{A}\}$$
$$^{nt}\mathfrak{C} \Leftrightarrow \top$$

La negación como aquí se ha definido no está definida en lógica intuicionista, así que cuándo en lógica intuicionista se utiliza la negación no es esta operación, que no va a estar disponible, sino alguna versión parcial o relativa de ella. Para saber más sobre esto, es bueno comparar las álgebras de Boole contra las de Heyting (más generales).

3.7.2.1. Introducción del principio de no-contradicción

El principio de no-contradicción lo podemos introducir en el momento en que introducimos la negación de notas-nombradas.

$$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \bot$$

Que quiere decir básicamente que todo es válido, que no hay orden entre las ideas generales, y así que todas son lo mismo. El lugar de las ideas generales en el pensamiento no tendría sentido alguno. Aún podemos decir que lo que estamos intuyendo ya no es en las ideas generales, sino en el logos, pero lo mismo se daría en el logos, el logos sería lo mismo que el caos del pensamiento o un lugar dónde solo tendría lugar una única idea-nombrada o extensión. Esto es básicamente el principio de no contradicción. Más adelante volveremos sobre el principio de no-contradicción.

Así que si se da el supuesto formulado anteriormente, razonamos por refutación o reducción al absurdo:

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \bot$$
$$\varphi \vdash \neg\psi$$
$$\neg\varphi \vdash \psi$$

3.7.3. Silogismos en su versión material

Si tenemos que ${}^{nt}\mathcal{A}$ y que ${}^{nt}\mathcal{A}$ implica que ${}^{nt}\mathfrak{B}$ tenemos que ${}^{nt}\mathfrak{B}$. Más formalmente,

$$\left\{{}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathfrak{B}, {}^{nt}\mathcal{A}\right\} \vdash {}^{nt}\mathfrak{B}$$

Se puede ver que al darse las notas de $\mathcal{A}$ se darán las notas de sus sub-ideas, por ejemplo $\mathfrak{B}$. Es el *modus ponens.*

A la inversa, si tenemos que $\neg{}^{nt}\mathfrak{B}$ y que ${}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathfrak{B}$ tenemos que $\neg{}^{nt}\mathcal{A}$. Más formalmente,

$$\left\{\neg{}^{nt}\mathfrak{B}, {}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathfrak{B}\right\} \vdash \neg{}^{nt}\mathcal{A}$$

Se puede ver que al no darse las notas-nombradas de $\mathfrak{B}$ no se darán las notas de sus super-extensiones, por ejemplo $\mathcal{A}$. Es el *modus tollens.*

Dicho de otra forma:

$$\left({}^{nt}\mathcal{A} \Rightarrow {}^{nt}\mathfrak{B}\right) \Leftrightarrow \left(\neg{}^{nt}\mathfrak{B} \Rightarrow \neg{}^{nt}\mathcal{A}\right)$$

3.7.4. La conjunción de notas-nombradas

Definimos una nueva forma de afirmar notas o atribuir, de acuerdo con el esquema del orden sugerido por las generalización. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathfrak{B}$ ideas-extensas, entonces ${}^{nt}\mathcal{A} \wedge {}^{nt}\mathfrak{B}$ es nota-nombrada de cualquiera super-extensión de $\mathcal{A}$ y $\mathfrak{B}$. De esta forma, si la idea-extensa $\mathfrak{C}$ es tal que $\{\mathcal{A}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathfrak{C}\}$ y $\{\mathfrak{B}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathfrak{C}\}$ equivale en las notas-nombradas a ${}^{nt}\mathfrak{C} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \wedge {}^{nt}\mathfrak{B}$.

Entre las propiedades inmediatas tenemos que:

$${}^{nt}\mathcal{A} \wedge {}^{nt}\mathfrak{B} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathfrak{B} \wedge {}^{nt}\mathcal{A}$$

A la simetría en los argumentos de la conjunción lo llamamos *conmutatividad.*

Otra fácil formalidad de la conjunción será:

$$({}^{nt}\mathcal{A} \wedge {}^{nt}\mathfrak{B}) \wedge {}^{nt}\mathfrak{C} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathcal{A} \wedge ({}^{nt}\mathfrak{B} \wedge {}^{nt}\mathfrak{C})$$

A esta otra simetría en el orden de hacer las operaciones, la llamamos *asociatividad*.

El nombre de conjunción viene justificado por:

$$\left\{ \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}}, \boldsymbol{nt}_{\mathcal{B}} \right\} \vdash \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{nt}_{\mathcal{B}}$$

De la conjunción se pueden eliminar términos:

$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{nt}_{\mathcal{B}} \vdash \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}}$$
$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{nt}_{\mathcal{B}} \vdash \boldsymbol{nt}_{\mathcal{B}}$$

Como atribución particular de lo anterior es clara la primera fórmula que sigue, la segunda es la *idempotencia*:

$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \vdash \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}}$$
$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \vdash \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}}$$
$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}}$$

Para algunos predicados concretos (notas ya nombradas) podemos concretar más reglas sobre las notas, teniendo en cuenta los dos párrafos precedentes, tenemos que

$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \top \Leftrightarrow \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}}$$

$\top$ es elemento neutro de la conjunción. No añade nota alguna.

$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$$

$\bot$ añade todas las posibles notas-nombradas: es el elemento absorbente.

Por último tenemos una importantísima derivación de atributos, que además contienen una afirmación sobre el principio de no-contradicción:

$$\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \neg \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \vdash \bot$$
$$\neg \left(\boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \wedge \neg \boldsymbol{nt}_{\mathcal{A}} \right) \vdash \top$$
$$\neg \top \Leftrightarrow \bot$$
$$\neg \bot \Leftrightarrow \top$$

3.7.5. La disyunción de notas-nombradas

Definimos una nueva forma de afirmar notas o atribuir, de nuevo con el esquema del orden sugerido por las generalización. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ideas extensas, entonces ${}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}$ es nota de cualquiera sub-extensión $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, esto es, $\{\mathcal{C}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{A}\}$ y $\{\mathcal{C}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{B}\}$, entonces lo que dice la definición de disyunción es que ${}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B} \vdash {}^{nt}\mathcal{C}$. De esta forma:

$$ {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathcal{B} \vee {}^{nt}\mathcal{A} $$

A la simetría en los argumentos de la disyunción lo llamamos *conmutatividad*.

Otra fácil formalidad de la disyunción será:

$$ ({}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}) \vee {}^{nt}\mathcal{C} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathcal{A} \vee ({}^{nt}\mathcal{B} \vee {}^{nt}\mathcal{C}) $$

A esta otra simetría en el orden de hacer las operaciones, la llamamos *asociatividad*.

El nombre de disyunción viene justificado por las siguientes propiedades fáciles de ver en la propia generalización:

$$ {}^{nt}\mathcal{A} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B} $$
$$ \left\{{}^{nt}\mathcal{A}, {}^{nt}\mathcal{B}\right\} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B} $$
$$ {}^{nt}\mathcal{A} \wedge {}^{nt}\mathcal{B} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B} $$
$$ \left\{\neg{}^{nt}\mathcal{A}, \neg{}^{nt}\mathcal{B}\right\} \vdash \neg\left({}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}\right) $$
$$ \neg{}^{nt}\mathcal{A} \wedge \neg{}^{nt}\mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\left({}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}\right) $$
$$ \neg{}^{nt}\mathcal{A} \vee \neg{}^{nt}\mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\left({}^{nt}\mathcal{A} \wedge {}^{nt}\mathcal{B}\right) $$

Como atribución particular de lo anterior es clara la segunda fórmula que sigue, la primera es la *idempotencia*:

$$ {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{A} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} $$
$$ {}^{nt}\mathcal{A} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{A} $$
$$ {}^{nt}\mathcal{A} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{A} $$

Para algunos predicados concretos (notas ya nombradas) podemos concretar más reglas sobre las notas, teniendo en cuenta los dos párrafos precedentes, tenemos que

$$^{nt}\mathcal{A} \vee \bot \ \vdash \ ^{nt}\mathcal{A}$$

$\bot$es elemento neutro de la disyunción. $^{nt}\mathcal{A}$ *es una de todas las notas posibles a la vez*, por lo tanto la super-extensión de ambas ha de ser precisamente $\mathcal{A}$, de ahí que $^{nt}\mathcal{A}$.

$$^{nt}\mathcal{A} \vee \top \ \vdash \ \top$$

$\top$ no añade ninguna nota, que corresponde a la máxima generalización posible, de dónde la única súper-extensión será de nuevo esa máxima generalización. Luego solo se puede derivar $\top$.

Por último tenemos una importantísima derivación de atributos:

$$^{nt}\mathcal{A} \vee \neg{}^{nt}\mathcal{A} \ \vdash \ \top$$

43

o ley de tercero-excluido. Si $\mathcal{A}$ es una extensión, $\neg{}^{nt}\mathcal{A}$ ha de corresponder a alguna otra extensión que no comparta ninguna nota y que a la vez las notas reunidas de ambas extensiones sean todas las posibles, entonces no cabe más que lo afirmado en el tercero-excluido. Viene dado en la definición de negación (o mejor, en la negación clásica que es la que estamos viendo). De nuevo volveremos a este punto más adelante.

3.7.6. Distribución entre la conjunción y la disyunción de notas-nombradas

Pensaremos en una relación entre la conjunción y la disyunción de notas de extensiones a partir de la relación entre generalizaciones y particularizaciones de extensiones.

Sean las ideas extensas $\mathcal{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. De un lado podemos pensar en las generalizaciones de $\mathcal{A}$ y de $\mathfrak{C}$ como extensiones en $\mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A}, \mathfrak{C}\}$, y de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ como extensiones en $\mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$. Hasta aquí solo generalizamos.

Ahora pensemos en particularizaciones entre extensiones de las generalizaciones anteriores (están a la vez dentro de una y otra):

$$\mathcal{P}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A}, \mathfrak{C}\}, \mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\}$$

. Si una idea extensa $\mathfrak{X}$ está en la última colección de extensiones, ha de ser porque todas la extensiones en $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\}$ y todas las que están en $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}$ generalizan a $\mathfrak{X}$ (eso es particularizar).

Vemos que $\mathfrak{C}$ generaliza a $\mathfrak{X}$, pues lo hace en cualquier caso.

Pero no basta con generalizar a $\mathfrak{C}$, sino que $\mathfrak{X}$ ha de ser particularización de $\mathcal{A}$ y de $\mathfrak{B}$ a la vez. Si $\mathfrak{X}$ está en $\mathcal{A}$ y no en $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{X}$ no puede ser particularización en $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}$ y por lo tanto no puede estar en

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\},\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}$$

. Así que $\mathfrak{X}$ particulariza a $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\}$.

Vemos que $\mathfrak{X}$ generaliza a $\mathfrak{C}$ y a cualquiera en $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\}$.

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\},\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}\ \textit{está dentro de}\ \boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\}$$

.

Ahora pensemos que una extensión $\mathfrak{Y}$ está dentro de $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\}$. Esto quiere decir que cualquier extensión dentro de $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\}$ está en $\mathfrak{Y}$, al igual que $\mathfrak{C}$ está dentro de $\mathfrak{Y}$.

Así que $\mathcal{A}$ está dentro de $\mathfrak{Y}$, al igual que si hablamos de $\mathfrak{B}$.

Vemos que $\mathfrak{Y}$ ha de particularizar a cualquier extensión en $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\}$ a la vez que a cualquiera en $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}$. Por lo tanto $\mathfrak{Y}$ está en $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\},\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}$.

Por lo tanto $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\}$ está dentro de $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\},\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}$, y con lo dicho anteriormente, coinciden.

Un razonamiento similar, nos hace ver que también coinciden $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\}$ y $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en}\,\{\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathcal{A},\mathfrak{C}\},\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}$.

Esta es la última propiedad a resaltar, la interacción entre las dos últimas operaciones lógicas binarias correspondientes a la generalización y a la conjunción

$$\left({}^{\boldsymbol{nt}}\mathcal{A}\wedge{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{B}\right)\vee{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{C}\Leftrightarrow\left({}^{\boldsymbol{nt}}\mathcal{A}\wedge{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{C}\right)\vee\left({}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{B}\wedge{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{C}\right)$$
$$\left({}^{\boldsymbol{nt}}\mathcal{A}\vee{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{B}\right)\wedge{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{C}\Leftrightarrow\left({}^{\boldsymbol{nt}}\mathcal{A}\vee{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{C}\right)\wedge\left({}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{B}\vee{}^{\boldsymbol{nt}}\mathfrak{C}\right)$$

Nos falta sin duda una justificación conceptual más clara y visible de estas relaciones entre operaciones, pero sin duda el lector podrá pensar bien el proceso que nos lleva a estas justificaciones. Sin duda, al final de esta sección sobre notas-nombradas podréis justificarlas con cálculos formales, pero no es ésta nuestra intención, ya que queremos ver como vamos de las ideas generales a la lógica proposicional en su insuficiencia y en su advertencia de la nueva operación cognitiva posible. La solución viene de trabajar con extensiones-nombradas, y así poder educir sus notas.

3.7.7. La disyunción como implicación material

Para comenzar tenemos que

$$\left\{{}^{nt}\mathcal{A}, \neg{}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}\right\} \vdash {}^{nt}\mathcal{B}$$

simplemente aplicando las propiedades antes mencionadas. Recordemos lo que se parece al *modus ponens*.

Seguimos con otro resultado que remeda al *modus pollens*

$$\left\{\neg{}^{nt}\mathcal{B}, \neg{}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}\right\} \vdash \neg{}^{nt}\mathcal{A}$$

de nuevo aplicando las propiedades antes mencionadas.

Otro resultado similar a la implicación silogística (con solo la conmutativa) es:

$$\neg{}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B} \vdash {}^{nt}\mathcal{B} \vee \neg{}^{nt}\mathcal{A}$$
$$\neg{}^{nt}\mathcal{B} \vee {}^{nt}\mathcal{A} \vdash {}^{nt}\mathcal{A} \vee \neg{}^{nt}\mathcal{B}$$

de nuevo aplicando las propiedades antes mencionadas.

Por fin veremos que también se tiene la transitividad de la implicación silogística:

$$\left(\neg{}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{B}\right) \wedge \left(\neg{}^{nt}\mathcal{B} \vee {}^{nt}\mathcal{C}\right) \vdash \left(\neg{}^{nt}\mathcal{A} \vee {}^{nt}\mathcal{C}\right)$$

de nuevo aplicando las propiedades antes mencionadas.

3.7.8. Axiomas lógicos y derivaciones o deducciones

Pongamos que haciendo caso omiso ya de las extensiones de las que proceden, tratamos ya solamente con las operaciones sobre notas que hemos desarrollado hasta ahora:

- $\top$ Hay «LA NOTA VACÍA» como nota nombrada.
- $\perp$ Hay «TODAS LAS NOTAS POSIBLES» como nota nombrada.
- $\top \not\Leftrightarrow \perp$ Estas notas no son lo mismo.
- $\neg\Phi$ Hay una nota nombrada para cada otra dada que comprehende el resto de las notas y nada de la original. No es intuicionista.

- $\Phi \wedge \Psi$ HAY la nota nombrada conjunción de otras. HAY una única nota nombrada que es maximal respecto a la particularización.
- $\Phi \wedge \top \Leftrightarrow \Phi$ La «LA NOTA VACÍA» es neutra en la conjunción de notas.
- $\Phi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$ «TODAS LAS NOTAS» es absorbente respecto a la conjunción de notas.
- $\Phi \wedge \Psi \Leftrightarrow \Psi \wedge \Phi$ Conmutatividad de la conjunción de notas.
- $\Phi \wedge \Phi \Leftrightarrow \Phi$ Idempotencia de la conjunción de notas.
- $(\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta \Leftrightarrow \Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta)$ Asociatividad de la conjunción de notas.
- $\Phi \vee \Psi$ HAY la nota nombrada unión de otras. HAY una única nota nombrada que es minimal respecto a la generalización.
- $\Phi \vee \top \Leftrightarrow \top$ La «LA NOTA VACÍA» es absorbente en la unión de notas.
- $\Phi \vee \perp \Leftrightarrow \Phi$ «TODAS LAS NOTAS» es neutra respecto a la unión de notas.
- $\Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Psi \vee \Phi$ Conmutatividad de la unión de notas.
- $\Phi \vee \Phi \Leftrightarrow \Phi$ Idempotencia de la unión de notas.
- $(\Phi \vee \Psi) \vee \Theta \Leftrightarrow \Phi \vee (\Psi \vee \Theta)$ Asociatividad de la unión de notas.
- $(\Phi \vee \Psi) \wedge \Theta \Leftrightarrow (\Phi \wedge \Theta) \vee (\Psi \wedge \Theta)$ Distributividad de la conjunción respecto de la unión.
- $(\Phi \wedge \Psi) \vee \Theta \Leftrightarrow (\Phi \vee \Theta) \wedge (\Psi \vee \Theta)$ Distributividad de la unión respecto de la conjunción.
- $\Phi \wedge \neg\Phi \Leftrightarrow \perp$ Dada una nota, la conjunción con su complementaria es «TODAS LAS NOTAS».
- $\Phi \vee \neg\Phi \Leftrightarrow \top$ Dada una nota, la unión con su complementaria es «LA NOTA VACÍA». NO ES INTUICIONISTA.

Constituyen los axiomas de Hungtinton para el álgebra de Boole de 1904 [Huntington, 1904] además de algunas propiedades que se podrían derivar de estos formalmente. Los axiomas anteriores son en realidad esquemas de axiomas, ya que las variables no son en realidad proposiciones o notas-nombradas, sino lugares dónde se requiere una substitución de la letra griega mayúscula por una nota nombrada. Podríamos decir que los esquemas de axiomas o de propiedades son notas nombradas por derecho propio, pero serán notas distintas de las que resultan una vez sustituidas por las notas-nombradas objeto[44].

Por último nos quedan las reglas de derivación que serán el *modus ponens* formal, el *modus tollens* formal y la regla de sustitución de variables por proposiciones o fórmulas bien formadas. Más adelante veremos las fórmulas bien formadas.

3.8. Los casos desgajados de la idea general y en las extensiones

Ésta es la segunda unificación que llevamos a cabo. Ahora queremos que las operaciones duales de generalización y particularización en extensiones nombradas guíen de forma casi unívoca a operaciones con solo los casos de las extensiones.

Los casos-nombrados de las extensiones los denotaremos por minúsculas en fuente germánica, $\mathfrak{a}$, mientras que los casos de una extensión-nombrada como $\mathcal{A}$ la denotamos como ${}^{cs}\mathcal{A}$. Que el caso $\mathfrak{a}$ es uno de los casos de la extensión $\mathcal{A}$ lo denotamos por $\mathfrak{a} \in {}^{cs}\mathcal{A}$. Que no es uno de los casos lo denotamos por $\mathfrak{a} \notin {}^{cs}\mathcal{A}$.

La unificación mencionada será clara: si $\{\mathfrak{B}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{A}\}$ equivaldrá a que todo caso de $\mathfrak{B}$ estará en $\mathcal{A}$, dicho de otra forma, si $\mathfrak{x} \in {}^{cs}\mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{x} \in {}^{cs}\mathcal{A}$, que se dice sin mencionar los casos así: ${}^{cs}\mathfrak{B} \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$. Son equivalentes las expresiones $\{\mathfrak{B}\}\,\mathcal{P}\mathbf{ar\_a}\,\{\mathcal{A}\}$, ${}^{cs}\mathfrak{B} \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$ y $\{\mathcal{A}\}\,\mathcal{G}\mathbf{en\_a}\,\{\mathfrak{B}\}$.

3.8.1. La resta de casos-virtuales entre extensiones-nombradas y la complementación: extensiones mínima y máxima

Para comenzar introduciremos los casos de dos extensiones-nombradas ya conocidas $\mathbf{\Lambda}$ y $\mathbf{V}$. Llamaremos ${}^{cs}\mathbf{\Lambda} \equiv \emptyset$ y ${}^{cs}\mathbf{V} \equiv \mathfrak{U}$. De esta forma, cualquier caso-nombrado $\mathfrak{a}$ de cualquier extensión $\mathcal{A}$ diremos que $\mathfrak{a} \in {}^{cs}\mathcal{A}$ será siempre $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$. Además, para toda extensión-nombrada $\mathcal{A}$ diremos que ${}^{cs}\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{U}$. Paralelamente diremos de cualquier caso-nombrado $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{U}$ que $\mathfrak{a} \notin \boldsymbol{\emptyset}$. De otra parte tendremos que para toda extensión $\mathcal{A}$ que $\emptyset \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$.

Podemos ahora introducir la operación de quitar elementos de una extensión, por ejemplo, los casos-nombrados de $\mathcal{A}$ que no coincidan con los de $\mathfrak{B}$, esto es, ${}^{cs}\mathcal{A} \backslash {}^{cs}\mathfrak{B}$. Esta operación nos da la oportunidad de introducir la operación unaria de complementación, que consiste en los casos (del universo de casos) menos los de una extensión. Así $\complement\, {}^{cs}\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathfrak{U} \backslash {}^{cs}\mathcal{A}$. Entre otras propiedades está: ${}^{cs}\mathcal{A} \backslash \emptyset = {}^{cs}\mathcal{A}$, ${}^{cs}\mathcal{A} \backslash {}^{cs}\mathcal{A} = \emptyset$, si ${}^{cs}\mathfrak{B} \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$ entonces ${}^{cs}\mathcal{A} \backslash \big({}^{cs}\mathcal{A} \backslash {}^{cs}\mathfrak{B}\big) = {}^{cs}\mathfrak{B}$ y ${}^{cs}\mathfrak{B} \backslash {}^{cs}\mathcal{A} = \emptyset$.

3.8.2. La unión de casos-virtuales entre extensiones-nombradas

Y por la misma causa que ${}^{cs}\mathcal{A} \backslash \big({}^{cs}\mathcal{A} \backslash {}^{cs}\mathfrak{B}\big) = {}^{cs}\mathfrak{B}$ tendremos que $\complement\complement\, {}^{cs}\mathcal{A} = {}^{cs}\mathcal{A}$. Es de notar el absoluto paralelismo con la operación de negar las notas de una extensión.

Así, si $\mathcal{A}\varepsilon\mathcal{G}\mathbf{en}\,\{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$ diremos que ${}^{cs}\mathfrak{B} \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$ y que ${}^{cs}\mathfrak{C} \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$, y de forma más breve, con una nueva notación especial para la operación que acabamos de introducir ${}^{cs}\mathfrak{B} \cup {}^{cs}\mathfrak{C} \subseteq {}^{cs}\mathcal{A}$, que denominamos unión de dos extensiones (de sus casos). Se trata del elemento minimal entre las generalizaciones de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, en cuanto a los casos.

Como propiedades de la nueva operación tendremos fácilmente (teniendo en cuenta que proceden de la generalización de extensiones-nombradas):

- ${}^{cs}\mathcal{A} \cup {}^{cs}\mathcal{B} = {}^{cs}\mathcal{B} \cup {}^{cs}\mathcal{A}$ CONMUTATIVIDAD
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cup \left({}^{cs}\mathcal{B} \cup {}^{cs}\mathcal{C}\right) = \left({}^{cs}\mathcal{A} \cup {}^{cs}\mathcal{B}\right) \cup {}^{cs}\mathcal{C}$ ASOCIATIVIDAD
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cup \emptyset = {}^{cs}\mathcal{A}$ ELEMENTO NEUTRO
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ ELEMENTO ABSORBENTE
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cup {}^{cs}\mathcal{A} = {}^{cs}\mathcal{A}$ IDEMPOTENCIA
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cup \complement^{cs}\mathcal{A} = \mathfrak{U}$ TERCERO EXCLUSO

3.8.3. La intersección de casos-virtuales entre extensiones-nombradas

Ahora introduciremos la operación dual de la anterior sobre los casos de una extensión nombrada: la intersección de casos. Sean las extensiones nombradas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, tales que $\mathcal{A}\varepsilon\mathcal{P}\mathbf{ar}\left\{\mathcal{B},\mathcal{C}\right\}$, entonces definimos ${}^{cs}\mathcal{A} \subseteq {}^{cs}\mathcal{B} \cap {}^{cs}\mathcal{C} \subseteq {}^{cs}\mathcal{B}$ y ${}^{cs}\mathcal{A} \subseteq {}^{cs}\mathcal{B} \cap {}^{cs}\mathcal{C} \subseteq {}^{cs}\mathcal{C}$, para cualquier particularización de esas dos extensiones. Entre los casos de las particularizaciones de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ existe un elemento maximal que es ${}^{cs}\mathcal{B} \cap {}^{cs}\mathcal{C}$ (al contrario que en las ideas generales, como ya vinos).

Como propiedades de la nueva operación tendremos fácilmente (teniendo en cuenta que proceden de la particularización de extensiones-nombradas):

- ${}^{cs}\mathcal{A} \cap {}^{cs}\mathcal{B} = {}^{cs}\mathcal{B} \cap {}^{cs}\mathcal{A}$ CONMUTATIVIDAD
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cap \left({}^{cs}\mathcal{B} \cap {}^{cs}\mathcal{C}\right) = \left({}^{cs}\mathcal{A} \cap {}^{cs}\mathcal{B}\right) \cap {}^{cs}\mathcal{C}$ ASOCIATIVIDAD
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$ ELEMENTO ABSORBENTE
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cap \mathfrak{U} = {}^{cs}\mathcal{A}$ ELEMENTO NEUTRO
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cap {}^{cs}\mathcal{A} = {}^{cs}\mathcal{A}$ IDEMPOTENCIA
- ${}^{cs}\mathcal{A} \cap \complement^{cs}\mathcal{A} = \emptyset$ NO CONTRADICCIÓN

3.8.4. La interacción fundamental unión e intersección

Queda ver la interacción entre estas dos últimas operaciones para que el cuadro axiomático de las álgebras de Boole quede completamente dibujado:

$$\left({}^{cs}\mathcal{A} \cup {}^{cs}\mathcal{B}\right) \cap {}^{cs}\mathcal{C} = \left({}^{cs}\mathcal{A} \cap {}^{cs}\mathcal{C}\right) \cup \left({}^{cs}\mathcal{B} \cap {}^{cs}\mathcal{C}\right)$$

Distributiva de la unión respecto de la intersección.

$$\left({}^{cs}\mathcal{A} \cap {}^{cs}\mathcal{B}\right) \cup {}^{cs}\mathcal{C} = \left({}^{cs}\mathcal{A} \cup {}^{cs}\mathcal{C}\right) \cap \left({}^{cs}\mathcal{B} \cup {}^{cs}\mathcal{C}\right)$$

Distributiva de la intersección respecto de la unión.

3.8.5. Resumen de la unificación de las extensiones-nombradas con sus casos-nombrados

Los casos de las extensiones forman un álgebra de Boole, que supongo no debería aceptarse en matemática intuicionista, solo alguna álgebra de Heyting sobre los casos de las extensiones. De cualquier forma muestran un dualismo excepcional con las notas de una extensión. Más adelante aprovecharemos esto.

De ahora en adelante tomaremos como primaria esta unificación de las extensiones con sus casos, de forma que no pondremos de nuevo ${}^{cs}\mathcal{A}$ sino simplemente $\mathcal{A}$, de esta forma una extensión queda definida completamente por sus casos. ¿Pero qué hay de la dualidad notas-nombradas/casos-nombrados cada uno de ellos unificados con la extensión?

3.9. La integración de los casos y las notas

A partir de ahora emplearemos una nueva notación para las extensiones. Sea una extensión $\mathcal{A}$, la escribiremos en relación con las notas de $\mathcal{A}$, así: $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left\{\mathfrak{a} | {}^{nt}\mathcal{A}\left(\mathfrak{a}\right)\right\}$ de forma que $\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow {}^{nt}\mathcal{A}\left(\mathfrak{a}\right)$. Así quedan plenamente unificados los distintos aspectos de la idea general: las notas y los casos son dos formas distintas pero unívocas y sin confusión alguna de decir exactamente la misma extensión-nombrada.

Nos habremos dado cuenta que las notas de una extensión han pasado de ser proposiciones que tiene la extensión, a ser predicados de los elementos que contiene, cosa que ocurre de forma bastante natural (es lo que queremos decir en la idea general, las notas de la idea se dan en los casos de la idea). Una nota de una idea general se dice de cualquier caso de esa idea general. Esto se ha completado aquí con el paso de proposiciones a predicados. De ahora en adelante el predicado fundamental será: $\varphi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \in \mathcal{A}$. *El signo* $\in$ *es ahora un predicado relación de dos argumentos que resume perfectamente las notas predicativas de los casos-nombrados bajo las extensiones-nombradas.*

Para trabajar dentro de extensiones grandes, tales como $\mathfrak{U}$, utilizaremos unos nuevos signos, los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

Ahora escribir que todos los elementos de una determinada extensión cumplen un predicado (nota) es sencillo:

$$(\forall \mathfrak{a})\,((\mathfrak{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathfrak{a}))$$

Que existe un caso de una extensión que cumple un determinado atributo es

$$(\exists \mathfrak{a})\,((\mathfrak{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}) \wedge (\boldsymbol{\varphi}(\mathfrak{a})))$$

3.10. La pérdida de la intención virtual hacia la definición

Bien, hemos dado un primer paso (incompleto, no pensable permanentemente, contradictorio) para superar la idea general. Los casos son virtuales. Hemos heredado en el pensable idea-extensa (y otros pensables ya nombrados) la relación de ser subextensión o super-extensión y de otra parte podemos aplicar algo que tiene toda la pinta de ser una igualdad. Cómo es esto posible, esto es, como la inteligencia da este salto, que aún no es completo no lo trataremos aquí, requiere de la iluminación a través del concepto racional. Pero este paso conlleva algunas contradicciones si los pensables aludidos son pensados como objetos. *Veamos, estamos tratando las ideas generales como circundando perfectamente una serie de casos, no todas las ideas generales ni todos sus casos, solo en la medida en que se pueda aplicar esta restricción.*

¿Cómo es esto posible? Solo si tratamos esas algunas ideas generales sobre esos algunos casos que caen bajo ellas de forma completamente segura como no afectadas por el tiempo. Me estoy refiriendo al tiempo que articula el conocimiento experiencial ahora, al tiempo de la conciencia. Este tiempo se hace correlato de algún otro tiempo que viene en determinados abstractos que podemos llamar *percepciones temporales*[45]. Esto nos dice que no nos vale simplemente con generalizar más y más, porque de esa forma solo conseguimos ideas casi vacías de contenidos de notas dónde entra casi toda la experiencia y a la vez ninguna. *Se trata de alejarse del abstracto y del flujo temporal articulado por el abstracto eliminando de alguna forma toda referencia. Hemos comenzado (y como veremos, terminado) a hacer esto mediante la intención virtual.*

Así que de alguna manera nos alejamos de lo mudable que pueda quedar en la idea general, y como ya conseguido, lo tratamos en la extensión.

Para conseguir esto debemos darnos cuenta que debemos poder poner las ideas generales de una extensión como en una relación de uno a uno y sobre (biyectiva) entre sus casos. Esto es como poder hablar de cada caso separadamente. Si esta comparación es por algún motivo imposible, no existirá la extensión correspondiente. La llamaremos *relación identidad del interior de ideas generales equi-extensas que nos dirá no solo que $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subsetneq \boldsymbol{\mathcal{A}}$, nos dirá que* ***debemos poder decir que para cada caso***

bajo $\mathcal{A}$ existe un caso bajo $\mathcal{B}$ que referencia las mismas experiencias y/o las mismas ideas generales. Poder decir esto viene a asegurarnos que se pueden controlar ciertos requisitos no muy claros aún, pero que en definitiva quieren decir *que existen ciertas precondiciones de definibilidad.* Si realmente podemos hacer lo dicho, tenemos que la definición por extensión exacta está a un paso.

Pero para conseguir todo esto necesitamos algo más: que los abstractos mismos sean virtuales también, así como las ideas generales[46]. Esto quiere decir que al nombrar un género-extensión, los abstractos han de ser nombrados (tomados como meros símbolos o *expresiones*[47] *unívocas*, esto es, *les basta con el nombre*[48]). Estas extensiones-nominales van un poco más allá de las extensiones, o mejor dicho, un alargamiento de lo visto en el hábito, aún en el mismo acto del hábito. Aunque lo trate como dos pasos aparentes, es solo un recurso para aclarar lo entrevisto. Las extensiones-nominales son básicamente la advertencia de deshacerse de lo empírico. Nominar los casos últimos no es más que transformar la idea general y por tanto la extensión en *pensables*[49] aparte dónde podemos enumerar mediante una definición formal o cualquier otro método a nuestro alcance cada uno de los casos que componen la extensión. La extensión-nominal sigue sin ser un objeto porque aún no sabemos cómo formarlo.

En la extensión-nominal aún queda un problema: la disimilitud aparente hasta la extensión-nominal desde la extensión hace que la interrelación entre ambas instancias sea un paso aparentemente infranqueable para llegar a la definición. La disimilitud o heterogeneidad es tal que al nombrar una intención virtual no sabemos cómo llegar hasta ella mediante la extensión-nominal. De lo que hay que darse cuenta es que básicamente la intención virtual es totalmente virtual, no se da en absoluto, es contradictoria.

Tenemos dos tácticas a seguir: definición por alguna forma de enumeración y definición de definiciones. Como la enumeración sería de algún tipo de pensable primitivo solo nombrado, de alguna forma la segunda táctica engloba a la primera, siempre que todo quede en *léxico organizado mediante alguna sintaxis: solo relación. Cada palabra de nuestro léxico (que serán solo nombres y verbos, quizás adjetivos como atributos) está definida por la sintaxis, de forma que la sintaxis ya no es un esquema general donde substituimos los nombres y los verbos por unos u otros según la intención, sino que la sintaxis define la palabra y la palabra restringe de manera par la sintaxis posible.*

¿Cómo conseguir definición de definiciones? Podemos comenzar por un término pensable que sea bastante único. En general hay dos alternativas: el pensable ***la unidad de la idea general respecto de sus casos***, a la que podremos llamar como $\mathfrak{Set}$ o $\mathfrak{Class}$[50], el pensable ***lo máximamente general*** (bajo la que caen a la vez todos los casos y ninguno por la debilidad o desaparición del vínculo con el abstracto), que denotamos por $\mathfrak{U}$ y ***pensamiento de algo o de ya***, que denotaremos por $\emptyset$. No tienen porqué ser los únicos pensables primitivos, pero basta con estos para el éxito de la empresa. Pero aún son pensables solamente.

Como ser un caso que cae bajo una extensión-nominal es una relación totalmente distinta del hecho que una extensión-nominal sea sub-extensión de otra, una relación es explícita entre objetos ideas generales y la otra es una relación entre la idea general y un intrínseco e implícito suyo, mantendremos la nomenclatura ya usada para ser sub-idea o super-idea, pero como es posible diferenciar claramente el caso de una extensión-nominal de la relación anterior nombraremos (denotaremos inventando nomenclatura), el caso (que ya no debería existir en este nivel de pensables) $\mathfrak{a}$ cae bajo la extensión $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ por $(\mathfrak{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}})$, o por el contrario, que no cae por $(\mathfrak{a} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}})$.

El pensable de *todos los casos-nombrados bajo una extensión-nominal*, lo nombramos por $(\forall \mathfrak{a})\,(\mathfrak{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}})$. El pensable al que ya hemos referido con anterioridad, de *existe una caso-nombrado que cae bajo una extensión-nominal* (al ver la relación de equivalencia entre extensiones), lo escribimos como $(\exists \mathfrak{a})\,(\mathfrak{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}})$. Solo nos tenemos que dar cuenta que las relaciones de inclusión o contención realmente ya las hemos definido (hablándolas) con anterioridad. Ahora, ser caso es algo puramente relacional respecto de las extensiones-nominales. $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}$ si y solo si $(\forall \mathfrak{c})\,(\mathfrak{c} \in \boldsymbol{\mathcal{A}})$ tenemos que $\mathfrak{c} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ (se pueden intercambiar libremente las expresiones: hemos reducido el que una extensión sea generalización de otra por una nomenclatura y una regla sobre ser caso-nombrado de una u otra extensión-nombrada). Para el caso comenzaremos por el pensable $\emptyset$. La negación, que venimos utilizando desde que pensamos alguna idea general, la llamaremos en este nivel $\neg$. Decimos que $(\forall \mathfrak{x})\,\neg\,(\mathfrak{x} \in \emptyset)$ o más brevemente $(\forall \mathfrak{x})\,(\mathfrak{x} \notin \emptyset)$.

Es importante darse cuenta que realmente hemos dado casi las reglas más importantes de la sintaxis de $\emptyset$, que es un término-nombrado nuevo (el primero). Pero ante la falta de todas las reglas de la sintaxis, aún no podemos decir que sea un objeto matemático. Si el pensable es más objeto que antes es también porque hemos renunciado a que refiera algo, nos hemos quedado con su falta de intención más absoluta.

De forma inversa podemos pensar la noción *lo máximamente general* de la siguiente manera: $(\forall \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \forall \mathfrak{x})\,(\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \Rightarrow\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{U})$, para cualquier extensión-nombrada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, aunque veremos que habrá que delimitar (sintácticamente) de algunas formas este pensable, que llamaremos *extensión-universo*. La delimitación fundamental será que nunca pensaremos esta extensión-universo como caso, por lo que nunca aparecerá al lado izquierdo del símbolo de relación de pertenencia que es el paralelo al ser un caso de. De hecho, este símbolo quedará reservado para la relación de ser la extensión-nombrada de todos los casos, luego cualquier caso está en $\mathfrak{U}$ y cualquier extensión-nombrada será sub-extensión de $\mathfrak{U}$. A su vez $\mathfrak{U}$ no será sub-extensión más que de sí misma y caso de nada (ni de sí misma). Cualquier extensión-nombrada que no pueda ser caso-nombrado, no será caso por tanto de $\mathfrak{U}$[51]. Es interesante ver que este pensable, vía de nombrarlo, lo que hace es perder su capacidad de relación con toda otra extensión-nombrada (desde sí) ya que solo nos apunta *toda la experiencia, sin exigir nota o predicado alguno*. Ahora el par $\emptyset$ y $\mathfrak{U}$ son dos pensables distintos y perfectamente definidos por la sintaxis. El único caso-nombrado de $\mathfrak{U}$ que no tiene casos-nombrados es $\emptyset$, a la vez que $\mathfrak{U}$ no es sub-extensión-nombrada de ninguna otra extensión y $\emptyset$ es sub-extensión de cualquier extensión. Todos los casos-nombrados de la *extensión-universo* son a la vez casos-nombrados y extensiones-nombradas: serán los futuros conjuntos. Las extensiones-nombradas que son subextensiones de $\mathfrak{U}$ serán las futuras clases[52].

Todo lo dicho hasta ahora no nos permite aún decir que hayamos conseguido un lugar de la inteligencia donde tengamos objetos definidos, matemáticos. Hasta ahora estamos en el nivel de lo meramente pensable no objetivo. ¿Qué deficiencias de lo pensable hasta ahora tenemos aún que superar? Por lo pronto nos faltan las relaciones-reglas[53] con las que proceder en lo definible (por el camino seguido hasta ahora), la lógica-matemática en definitiva. Nos hace falta la *relación-regla de no-contradicción*, que usamos continuamente sin ser conscientes, *la relación-regla de tercero-excluido*, la noción de *relación-transformación de un caso en otro*, y la *relación-regla de mismidad.* Como no pretendemos decir todas las posibles verdades o arranques posibles de lo definible, lo único necesario que queda será la *relación-regla de inducción matemática, los números naturales.*

3.11. La construcción efectiva de las extensiones-nombradas

Procedemos en los siguientes dos puntos a nombrar, definir, los elementos principales que nos llevarán hasta la matemática. El esfuerzo principal no es el de formalizar, pero esto está saliendo con cierta facilidad: el esfuerzo principal es el de vislumbrar lugares del pensamiento desde dónde cobren sentido las formalizaciones, y esto, en una forma radical. *¿Qué principios son los que animan las matemáticas?* El siguiente estudio está encaminado a hacer una reflexión posterior, por eso he agrupado los apartados numerados en dos puntos.

3.11.1. Las relaciones-reglas de la lógica

Las relaciones-regla son lo que de forma clásica se han llamado primeros principios de la lógica, aunque aquí no va a jugar ningún papel la causalidad. Este principio real es puesto en máxima relevancia en la teoría del conocimiento poliana, pero actuando desde otro lugar, como prisma que nos da qué transformaciones ha de haber en la generalización o negación (de notas), que ya hemos advertido, desde el principio, no será tema en esta primera investigación.

Hemos de ver que lo que tenemos que intuir es la formación, o cómo se dicen los siguientes pensables:

3.11.1.1. Los signos $=$ y $\Leftrightarrow$

Para los casos-nominales y para las extensiones-nominales el signo de $=$ y para los predicados $\Leftrightarrow$. Explicar la no introducción de información. Dados un caso-nominal $\mathfrak{x}$ y una extensión-nominal $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, podemos escribir $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ y $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Para las proposiciones o los predicados sobre casos concretos $\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}$.

3.11.1.2. La relación-regla de mismidad (conocida clásicamente como de identidad)

La significación del signo igual, en el nivel de pensamiento en el cual nos encontramos, que es evidentemente no objetivo (hablamos aún de pensanbles), puede ser algo difícil de ver. ¿Alguien tiene dudas del significado del signo $=$? En la medida en que es algo no preguntado, dado por evidente ya de inicio, lo que no podemos comprender bien es cuál es la pregunta.

Sin embargo la pregunta no es difícil de plantear (y casi la hemos respondido ya): ¿qué quiere decir que un caso sea igual que otro caso? Hay que recordar que los casos no comparecen como objetos y no son algo separable de la idea general. De hecho, hemos tenido que asumir que para hacer extensiones solo podíamos contar con los casos que he llamado interiores a la idea general. Esto quiere decir que no puede caber duda en ningún sentido que ese caso cae bajo ese género o especie, o que por el contrario, no cae en absoluto. Pero esto es el tipo de cosas tan difíciles en la generalización. También hemos dicho que para hacer una extensión solo podemos contar con ideas que puedan ser conectadas biunívocamente por sus casos, y para esto debíamos poder abstraernos nominalmente. Esta condición es como poder poner un nombre a cada uno de los casos que caen bajo una extensión. Ahora podemos decir fácilmente que $a = a$ es una expresión (solo un pensable aún). Y no aporta nada. Solo dice que tienen el mismo nombre porque son el mismo caso-nominal. Si hablásemos de dos casos y dijésemos $a = b$ solo estaríamos diciendo que hemos nombrado un caso de dos formas distintas. Hasta ahora totalmente vano. Esta igualdad entre casos realmente solo nos dice algunas de las condiciones que hemos visto necesarias para poder superar las insuficiencias de la idea-general. Aún no hemos dicho nada sobre la desigualdad.

Es importante darse cuenta, que la igualdad solo quedará casi nombrada cuando escribamos las dos relaciones-reglas que nos quedan para la igualdad y la desigualdad: la no-contradicción y el tercio-excluso.

¿Qué hay de la igualdad entre extensiones nominales? Decimos que dos extensiones nominales son iguales si $(\forall \mathfrak{x})\ (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}})$ ocurre que $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y que $(\forall \mathfrak{x})\ (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{B}})$ ocurre que $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Así $(\boldsymbol{\mathcal{A}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}) \wedge (\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}})$ nos dice exactamente que $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}$. El "aclarado" de las ideas generales nos permite el signo de igualdad. Ahora el indicio que dice las ideas generales que caen sobre los mismos casos son nombradas iguales si solo nos importa su extensión cobra un sentido más nítido.

Idénticamente podemos hablar de la biimplicación. La igualdad entre extensiones llega tan lejos como las notas de esas extensiones definan completamente cada una de las extensiones. La igualdad de los casos se puede ver como la igualdad o biimplicación de todos los predicados posibles sobre esos casos, y viceversa.

3.11.1.3. La relación-regla de no-contradicción

Este es un tema de importancia capital en el que no podemos aquí extendernos[54].

Pongamos que decimos que para un caso-nominal $\mathfrak{a}$ podemos decir $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$. Si eso pudiese ser así, por ahora nada nos lo impide, querría decir que le hemos puesto un nombre idéntico a dos casos distintos. Dos casos distintos hacen referencia a dos abstracciones distintas, o que la abstracción no articule el tiempo y todo sea lo mismo (Parménides y los eléatas). Por ejemplo hay una *cosa* α que la conocemos y momentos después volvemos a ver esa *cosa* α. Pero como no hablamos de *cosas*, sino de conocimiento aquí y ahora, de objetos del conocimiento, nada nos permite decir: son el mismo caso, porque hemos accedido solo al abstracto a y al a'. Evidentemente $a \neq a'$. Cada abstracto es distinto de cualquier otro. El tiempo está a la base de la distinción. Pero la operación de abstraer está a la base de la unicidad del acto de abstraer. La igualdad y la desigualdad de casos tiene que ver con lo que hay, esto es, con el acto *ya* de la inteligencia en el abstraer. La desaparición de las diferencias entre actos de la inteligencia es algo que remite al axioma poliano A (de los actos de la inteligencia como actividad), y nos da a entender que no existe acto sino pasividad en la inteligencia, dándole una entidad al abstracto diferente del abstracto mismo, haciendo el abstracto independiente de la inteligencia.

Básicamente, decir que $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$ *es absurdo* solo dice que nos hemos confundido dando a casos distintos un único nombre, y esta relación-regla (la de no-contradicción) prohíbe esto. En tanto que tratamos los casos, la relación-regla de no-contradicción solo nos dice que cada abstracto es distinto de los demás. No hay dos abstractos iguales (y no debemos nombrarlos de igual forma).

Aún existen otros problemas que disolver para que podamos pasar del pensable de no-contradicción a una relación-regla (y más si ha de ser objetiva). Por ejemplo, si $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, ¿podemos decir que $\mathfrak{x} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}}$? Eso querría decir que la extensión-nominal cambia de alguna forma para tener en un momento (no necesariamente temporal) a un caso y en otro no. Pero hemos nombrado extensiones pensables que ocurren sobre casos-nominados, y una vez nombrado todo (de alguna forma) advertimos que ya no queda lugar para el cambio. El caso-nombrado ya no tiene nada que ver con el flujo de las abstracciones. ¿Cómo?

Realmente, el cómo se ha venido dando de manera continuada a través del hábito que estamos actuando. Lo hemos estado separando radicalmente de la idea, que por eso es ahora (hablamos en realidad de un pensamiento basado en el anterior que profundiza) extensión-nominal. Por eso al caso lo estamos llamando caso-nominal. Si el caso ya no es lo que era aún cabe preguntar ¿qué es ahora el caso-nombrado?

En la misma medida debemos pensar la relación-regla: $\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \neg\boldsymbol{\varphi}$ *es absurdo o no se puede dar*. Realmente admitir esa posibilidad, siguiendo lo visto en la unificación de las notas y la extensión, nos dice $\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} \wedge \neg\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \perp$ y habíamos visto que para cualquier $\boldsymbol{\psi}$ tenemos que $\perp \ \vdash \ \boldsymbol{\psi}$, luego utilizando lo anterior, para cualquier $\boldsymbol{\psi}$ tenemos la siguiente derivación $\boldsymbol{\varphi} \ \vdash \ \boldsymbol{\psi}$ y, por lo tanto, $\boldsymbol{\varphi} \ \vdash \ \boldsymbol{\psi}$ de dónde para cualquier par de proposiciones $\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}$. Otra forma de decirlo es: no encontraremos ningún tipo de distinción entre notas, tendremos una sola nota, y de aquí, una sola extensión, y un solo caso. Digamos que el pensamiento solo tendría una idea que pensar, que es lo mismo que pensar nada, o bien pensar todo con esa sola idea, o bien decir que todas las notas coinciden con ninguna nota y por lo tanto todos los casos con ningún caso. Este colapso del pensamiento nos da una idea clara: el principio de no contradicción es condición *sine qua non* de la operatividad de la inteligencia. Así, ***consistencia es permanencia del pensar***.

Como apéndice queda la siguiente fórmula: $(\nexists \mathfrak{a} \nexists \boldsymbol{\mathcal{A}})\left(\varphi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \neg\varphi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{a})\right)$.

3.11.1.4. La relación-regla de tercero-excluido

Dados dos casos nombrados $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, o bien $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, o bien $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$: eso es lo que en un primer pensamiento se me ocurre que se ve en esta relación entre pensables nombrados. Para no repetirnos la pregunta es: ¿existe una tercera posibilidad? Desde luego en el mundo de las ideas generales no podríamos negarnos y podríamos encontrar casos que parcialmente caen bajo una idea general y parcialmente no: pero esto es cuando objetivamos el separar lo que realmente es intrínseco. Ahora el caso ya no es tal, sino caso-nombrado. Su estatus no es el mismo que el del caso. Ahora lo que hemos hecho con la completa separación en las extensiones-nombradas, la separación entre casos-nombrados y extensiones-nombradas, y de los casos-nombrados entre sí es su completa decibilidad[55]: podemos decir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ (y entonces no podemos decir lo contrario) y podemos decir $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ (y no podremos decir lo contrario). Cuál de las dos podamos decir (y digamos, pues puede aquí quiere decir: tiene que ser dicho que) es el asunto ya pensado en el apartado del signo $=$ y la mismidad.

Así la igualdad es en el pensamiento nombrante, una analítica de la mismidad de lo que hay, del abstracto, que siempre es considerado como separado uno de otro, al igual que con las ideas generales. Es también una analítica de la distinción entre abstracciones y entre ideas generales entre sí.

Dado un caso-nombrado y una extensión-nombrada, o bien el caso cae bajo la extensión, o bien el caso no cae bajo la extensión: eso es lo que queda por pensar. Pero podemos decir $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ (y no podemos entonces negarlo también) y podemos decir $\mathfrak{x} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}}$ (y habrá que seguir respetando la relación-regla de no-contradicción). Y lo podemos decir por la separación ya procurada entre pensables nombrados. Y de nuevo el caso que sea es exactamente por lo que hemos pensado los pensables nombrados.

Ahora, que dos extensiones nombradas tengan que tener una relación de igualdad o desigualdad, se disuelve en la relación de ser sub-extensión o super-extensión. Y esta relación se disuelve a su vez en la de ser un caso-nombrado de una extensión-nombrada que ya hemos expuesto. Y a su vez la igualdad de casos-nombrados cae en la relación-regla de tercio-excluso, como primeramente hemos visto.

Finalmente, gracias a la partición en que consiste la operación de negación $\neg$ de las notas-nombradas de una idea-extensa, obtenemos $\boldsymbol{\varphi} \vee \neg\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \top$ o dicho de otra forma $\{\boldsymbol{\varphi} \vee \neg\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}\} \vdash \neg\boldsymbol{\varphi}$ y que $\{\boldsymbol{\varphi} \vee \neg\boldsymbol{\varphi}, \neg\boldsymbol{\varphi}\} \vdash \boldsymbol{\varphi}$. Esta definibilidad tan completa la hemos descubierto al nombrar explícitamente la operación de negación. Como ya vimos, tiene una traducción en casos bien clara: $\forall \mathfrak{a} \forall \boldsymbol{\mathcal{A}}$ bien $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ bien $\mathfrak{a} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

3.11.1.5. El signo $\in$

Ya hemos comentado que algo sobre el signo de pertenencia a una extensión. Que un elemento lo sea de una clase viene introducido por la intuición de caso que cae bajo una idea general. Ya hemos visto la dificultad que trae consigo la idea general. Casi de inmediato hemos dado con el pensable extensión y más aún con el de extensión-nombrada, que trae paralelo el pensable caso-nombrado, que pretendemos que finalmente no traigan diferencias fundamentales en el logos matemático.

Hasta ahora, el hecho de formalizar no parece que cree problemas más allá de la formalización misma. Sin embargo, desde un principio hemos establecido las reglas de no-contradicción, y hemos establecido que todo puede nombrarse siempre que no contradiga las anteriores reglas. Luego esto ha de tenerse en cuenta a la hora de definir, notar y decir en general.

En conjunción con lo anterior, tenemos el siguiente problema: que un caso caiga bajo un género es algo representable fácilmente en el pensar generalizante, pero al llevarlo al terreno de lo nombrado, efectivamente, caso y género pierden su distancia habitual. A nadie se le ocurre en principio decir que el género A es un caso del género A. $A \in A$ no tiene sentido en el pensar generalizante. Pero al perderse esa cierta distancia de nivel entre caso e idea general al convertirse en extensión-nombrada/caso-nombrado queda por preguntarse si esa expresión sigue sin tener sentido. Como más adelante veremos, más que de sentido tendríamos que hablar en matemáticas de ir contra las reglas como la de no contradicción. Así que nos limitaremos a examinar este punto con la relación de pertenencia.

Pongamos que tenemos una clase $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ tal que $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{x} \notin \mathfrak{x}$. ¿Es esto una fórmula admisible? Si decimos que es una clase la respuesta es ***no***. [56]

La razón es sencilla: si $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}}$ y viceversa, $\boldsymbol{\mathcal{A}} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, luego $\boldsymbol{\mathcal{A}} \notin \boldsymbol{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Así, si nos permitimos instanciar la fórmula llegamos a contradicción. Si no permitimos instanciarla, parece que vamos contra la regla de tercio-excluso. Sólo queda decir que es una regla de la misma índole que las anteriores, que la clase que creíamos haber nombrado, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, no es nombrable (se puede escribir, pero no puede ser pensado).

Así que la regla es $\mathfrak{X} \notin \mathfrak{X}$ no es un pensable ni siquiera en el hábito o la advertencia. Nada tiene que ver que se pueda escribir. Es una formalidad sin significado, contradictoria, un galimatías. Habría que extender esta regla a cadenas de no pertenencias, ya fueran cíclicas o lineales.

Aún queda saber si podemos formular $\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}$ como pensable y su extensión a cadenas de no pertenencias de cualquier tipo. En Quine [Quine, 1937, Quine, 1969] aparece como formalmente representable el individuo, esto es, el objeto matemático que no puede ser clase. $\mathfrak{a}$ es individuo si $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}\}$. En este caso es claro que $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}\} = \mathfrak{a}$ luego $\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}$ es una propiedad de todo individuo. Sin embargo, él mismo dice y sabemos que para las matemáticas nos basta sin incluir ningún tipo de individuos. El único

Urelement, es $\emptyset$, que al ocurrir que $\emptyset \notin \emptyset$, podemos asegurar que es clase, aunque primera, esto es, sin elementos, y única.

¿Qué sentido tiene que en matemáticas existan objetos individuos? Solamente con el fin de representar objetos del mundo independientes e iniciales que ayuden a construir teorías, pero esto es quizás mejor conseguido reservando clases para estos fines. La fórmula $\mathfrak{x} \in \mathfrak{x}$ parece remitir al siguiente pensable: si tenemos un caso nombrado que es tan elemental como un abstracto, en su representación parece que la clase que lo contiene, la clase unidad de ese caso, no es más que la clase que lo piensa *solo a él*, esto es, la generalización de un único objeto pensado es el mismo objeto pensado, ya que su generalización no quita ninguna nota. Pero esto es esencialmente inútil, la matemática no puede representar la materialidad de algo, ya que todo el proceso de llegar al logos matemático es fundamentalmente el proceso de desmaterialización, de pérdida de conexión con lo concreto abstracto, con las ideas generales mismas, en cuanto que tienen intención en el abstracto singular. Por eso, y por simplicidad, los sistemas axiomáticos de teoría de conjuntos observan la posibilidad de añadir individuos, pero como algo que de hecho no hacen. Las axiomatizaciones de teoría de conjuntos más usuales introducen algún axioma de buen fundamento.

Una teoría bien fundada es una teoría que cumple el siguiente requisito:

$\{\mathtt{y}_0, \mathtt{y}_1, \ldots\}$ tal que	$(\imath \neq \jmath) \Rightarrow (\mathtt{y}_\imath \neq \mathtt{y}_\jmath)$
$\mathtt{Y}_0 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \emptyset$	cadena vacía
$\mathtt{Y}_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathtt{y}_\imath \in \mathtt{y}_\jmath$	cadena con solo una pertenencia
$\mathtt{Y}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathtt{y}_\imath \in \mathtt{Y}_n \in \mathtt{y}_\jmath$	cadena con $n+1$ pertenencias
$\forall \mathtt{x} \in \mathfrak{U} \nexists m \in \omega \; \mathtt{x} \in \mathtt{Y}_m \in \mathtt{x}$	Está bien fundado

A propósito de la pertenencia aún queda investigar si hay algún pensable que se remita a sí mismo, lo que nos podría llevar a una forma de legitimar desde la intuición alguna clase no bien fundada.

Un primer intento es el original de B. Russell al introducir la paradoja que implicaba el principio de extensión irrestricto en la ideografía de Frege. Decía, si consideramos las clase de los tenedores, es claro que la clase misma de los tenedores no es un tenedor, no pertenece a la clase de los tenedores. Sin embargo la clase de los objetos que no son tenedores, claramente no es un tenedor, por lo que queda claro que se pertenece a sí misma. Este ejemplo de Bertrand Russell podemos analizarlo a la luz de nuestro conocimiento de las ideas generales (ya que en general, ni Frege ni Russell parece que tengan en mente la idea general como distinta de otros tipos de objetos del pensamiento, ni siquiera parece que hayan advertido que existan pensamientos que no sean objetos del pensamiento). Ser un tenedor es un concepto en epistemología de Frege, una clase en la de Russell. En ambos casos, bajo los conceptos (clases) han de caer objetos como individuales y reales en Frege (simplemente otras clases en Russell).

Para el concepto de ser tenedor queda claro que se cumple lo anterior. Analicemos el otro concepto, el de no ser tenedor. El problema de no ser tenedor es que difícilmente cae bajo la noción de concepto de Frege. Bajo no ser tenedor cae no ser tenedor, cosa que es noción y no objeto. En nuestra forma de trabajar las ideas generales hemos establecido la idea general como la negación de (en tanto que quitar) algunas notas de una sub-idea, B, pero si quitas todas las notas y añades la negación (esta vez de lógica proposicional) de las notas de la sub-idea, no tenemos una idea general. Partimos del las notas pensables $\boldsymbol{nt}_{\mathfrak{U}} \wedge \neg \boldsymbol{nt}_{\boldsymbol{B}} = \top \wedge \neg \boldsymbol{nt}_{\boldsymbol{B}} = \neg \boldsymbol{nt}_{\boldsymbol{B}}$ que nos remiten a los pensables $\mathfrak{U} \backslash B$ que es un pensable y no una idea general. Así que el pensamiento de Russell acerca de los objetos que se pertenecen a sí mismos no nos obliga a considerar esa posibilidad de autopertenencia como forzada por las ideas generales.

Por ejemplo podríamos pensar en el argumento ontológico de San Anselmo en su Proslogium. Comienza por la idea del ser más perfecto que nada pueda ser pensado más perfecto. Esta idea sería la absolutamente necesaria. La absolutamente necesaria es aquella que se predica de cualquier otra idea o individuo. Ésta sólo puede ser $\mathfrak{U}$, pues es definida como $(\forall \mathfrak{z})\,(\mathfrak{z} \in \mathfrak{U})$, luego podemos legitimar que $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}$. Solo ese caso parece legitimado y ningún elemento individual (como *no clase*).

Aún otro pensamiento puede asaltarnos, y que tiene parecido con el argumento de Anselmo de Canterbury. Es el ya más antiguo, pero que da vida al propósito hegeliano del pensamiento en el que la forma y el contenido son idénticos. No conocemos más pensable que cumpla esto que el Absoluto hegeliano, pero aún así podemos intentar trasladarlo al logos y ver que resulta, y si tiene sentido admitirlo. Veamos: una clase tiene forma y contenido, digamos que su forma son sus notas, su contenido son sus conjuntos elementos. Hasta ahora estamos considerando algo cercano a lo que quiere Hegel, que la identidad de la forma es la identidad en la pertenencia de los elementos. Pero no es la identidad de casos y notas. Para que se dé esa identidad necesitamos que los elementos de la clase sean predicados, por ejemplo una clase que sea la clase de los predicados, pero el predicado que determina la forma de la clase ha de ser una clase él mismo. Pensémoslo un poco mejor. Decimos de una clase que sus elementos cumplen un predicado. Un predicado puede ser *ser un predicado*. Pero ¿puede una clase ser ella misma un predicado y además ser un predicado que coincida con las notas de la clase? No en campo de las ideas generales, ya que los casos son remitentes a a los abstractos, y de ahí a la experiencia. Las notas sensibles no pueden ser predicados abstractos. Aún así queda por pensar este asunto más a fondo.

Sin embargo, aunque no hayamos cerrado la última de las preguntas abiertas, dado que la pertenencia de clases propias a clases es en general fuente de contradicciones, no permitiremos la autopertenencia en ningún caso. La matemática que estamos nombrando será una teoría bien fundada.

3.11.1.6. Resumen

Con esto hemos terminado una cierta analítica de los abstractos y las ideas generales que podemos llamar iguales, siempre y cuando las ideas generales y los abstractos que son su intención tengan un grado de separabilidad entre ellos y una claridad en el caer bajo tal que en un límite podríamos hablar de igualdad y pertenencia como aquí hemos hablado. Es una analítica de la separabilidad de los actos de la inteligencia.

3.11.2. La existencia nominal y la postulación hipotética de los casos nombrados

57

Ahora tenemos un pequeño problema. Usamos habitualmente las expresiones "pongamos que se da un caso de ...", o la de "pongamos que tenemos una extensión de tal predicado ..." y otras similares. Los casos de las ideas generales no se pueden decir, puesto que acompañan a la idea general, siendo parte de la misma en forma de intención. De hecho el postularlos no es más que representarlos de forma no sensitiva o simbolizarlos. El imaginarlos es añadir un nueva intención a la idea general, el simbolizarlos es incluso entrar en el hábito de la generalización y transformar lo que es una idea general y sus casos, algo así como el decir: podemos aún pensar casos que no se han dado, esto es, no presentes en la idea general, pero que entrarían en ésta sin cambiarla. Eso ya no es la idea general. Sin embargo en la extensión-nombrada no existe problema para decir pongamos el caso-nombrado, que no será otra cosa que alguno, sin referirlo expresamente, de los casos-nombrados.

Para poner una extensión-nombrada solo hay que dar una definición, o incluso dar un nombre para esa extensión y después empezar a dar relaciones-reglas que concreten lo que queremos decir. Nombrar y decir, en este sentido, es postular, poner, una extensión nombrada. Nombrar y decir, en el sentido aquí expuesto, se va delimitando como lo que hacemos habitualmente cuando pensamos de manera precisa.

Quiero que veamos que en el nivel que estamos, la postulación hipotética no es más que nombrar alguno de los casos nombrados de una extensión nombrada. Para hacer esto sólo necesitamos que caiga algún caso nombrado bajo esa extensión nombrada[58]. Para postular-hipotéticamente eso es lo único que hemos de saber. Aún no tenemos suficientes criterios para tratar la existencia hipotética de pensables nombrados, pero la dirección no será otra que la de confundir la existencia hipotética con el poder nombrar ya establecido según el léxico y la sintaxis que se va dibujando.

3.11.3. Las *transformaciones* entre extensiones nominales y definiciones afines

Dadas dos extensiones-nominales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ (no necesariamente distintas) tenemos que todos los casos son perfectamente nombrados (definidos) en ambas extensiones, y mediante la unificación ya hecha anteriormente de las extensiones con sus casos, siguiendo directamente la noción de generalización de las ideas, hemos obtenido las extensiones $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y la pareja de extensiones $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$, a la vez que $\complement\mathcal{A}$ y $\complement\mathcal{B}$. Para complementar el cuadro decir que $\mathcal{A} \bigtriangleup \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}) \cup (\mathcal{B}\backslash\mathcal{A})$ que llamamos diferencia simétrica de dos extensiones.

Con las operaciones entre extensiones que hemos indiciado desde las ideas generales tenemos un problema. Tenemos tres predicados claros entre conjuntos, $\in$, $\subseteq$ y $=$. Además tenemos los predicados universales (constantes) $\perp$ y $\top$. Como objetos-operandos para esos predicados tenemos solamente dos, $\emptyset$ y $\mathfrak{U}$. ¿Cómo podemos desarrollar algo más que puras evidencias con todo esto? Por ejemplo, ya hemos unificado los casos de una extensión con las notas de una extensión, de forma que los predicados deberíamos poder escribirlos en la forma de los anteriores predicados y las operaciones entre predicados como $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\Rightarrow$. ¿Cómo abrir el campo de los objetos-predicados y los objetos-extensiones?

La clave estará en pensar en formas de establecer relaciones entre casos que sean a su vez casos. Así abriremos el campo de los objetos ideas-puras sin hacer distinciones de ninguna clase entre notas y casos.

Lo primero será crear una notación para las extensiones que podamos escribir en base a unos pocos casos-nombrados. Por ejemplo, si $\mathfrak{z}$ es un caso-nombrado, la extensión $\{\mathfrak{z}\}$ la llamaremos la clase unidad de $\mathfrak{z}$, denotándolo como $\mathfrak{u}\mathfrak{S}(\mathfrak{z})$. A su vez, $\mathcal{Z}$ será una clase unidad si

$$(\mathcal{Z} \neq \emptyset) \wedge ((\forall \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y})((\mathfrak{x} \in \mathcal{Z} \wedge \mathfrak{y} \in \mathcal{Z}) \Rightarrow (\mathfrak{x} = \mathfrak{y})))$$

o, alternativamente

$$(\exists \mathfrak{z})(\mathcal{Z} = \{\mathfrak{z}\})$$

A continuación podremos nombrar clases unión entre clases unidad, por ejemplo, $\mathcal{Z} = \{\mathfrak{x}\} \cup \{\mathfrak{y}\}$, que podemos expresar como $\mathcal{Z} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$.

Si queremos relacionar dos casos-nombrados, deberemos poder introducir el orden en las extensiones de alguna forma. En el caso más elemental, $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}$, luego no hay orden alguno entre los elementos así conseguidos. Realmente es sencillo introducir este orden. Definiremos el par ordenado de la siguiente forma:

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\{\mathfrak{a}\}, \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}\}$$

Estos pares ordenados observan la propiedad de ordenamiento que buscamos, que haya un elemento primero y uno segundo: $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle$ si y solo si $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ y $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$[59].

Las extensiones-casos que estamos buscando son aquellas que ponen en conexión casos de una extensión con casos de otra, y para eso hemos buscado el par ordenado de casos. Ahora podemos nombrar una operación entre dos extensiones que nos dé todas las posibles relaciones entre casos desde una extensión y con dirección a los casos de otra: es el producto cartesiano de dos extensiones. Esta operación nos dará toda la potencia necesaria para establecer relaciones como extensiones.

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \{\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle | \mathfrak{a}\in\mathcal{A}\wedge\mathfrak{b}\in\mathcal{B}\}$$

Cualquier subextensión de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ constituye una relación desde la extensión $\mathcal{A}$ hasta la extensión $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{R}$ constituye una relación tal que,$\mathfrak{a}\in\mathcal{A}$ está relacionado $\mathcal{R}$ con $\mathfrak{b}\in\mathcal{B}$ si y solo si $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle\in\mathcal{R}$. Ya tenemos relaciones que son extensiones. En el logos, las relaciones serán un tipo especial de extensiones, aquellas cuyos casos son parejas ordenadas en la forma que aquí las hemos dicho o definido.

Aún tenemos una indicación de las ideas generales más. Tenemos una idea A con una serie de casos $\{a,b,c,\ldots\}$. Si $a\neq b$, será porque a tiene algunas notas distintas de b. Lo mismo con la subidea de solo $\{a,b\}$ con la de solo $\{b,c\}$. Cada una de esas colecciones de casos tiene notas distintas de las otras, o no serían realmente distintas. Para afirmar esto ya habríamos de entrar en las extensiones, así que las anteriores ideas y casos serán solo representantes de las extensiones y los casos-nombrados que representan. Veamos, si $\mathcal{A}=\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}$ aparecerán colecciones de notas distintas para cada una de los siguientes casos de la siguiente extensión $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\emptyset,\{\mathfrak{a}\},\{\mathfrak{b}\},\{\mathfrak{c}\},\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\},\{\mathfrak{a},\mathfrak{c}\},\{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\},\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}\} = \\ &= \{\emptyset,\{\mathfrak{a}\},\{\mathfrak{b}\},\{\mathfrak{c}\},\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\},\{\mathfrak{a},\mathfrak{c}\},\{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\},\mathcal{A}\} \qquad = \mathcal{P}(\mathcal{A})\end{aligned}$$

Todos los casos enumerados son distintos entre sí, de dónde han de tener notas diferentes, aunque manos casos de $\mathcal{B}$ constituye un representante de las notas posibles dentro de las sub-ideas de $\mathcal{A}$. Y esto podremos hacerlo para muchísimas extensiones de forma propia, todas aquellas que son casos-nombrados. Para las que no pueden ser casos nombrados, el conjunto de todas las posibles combinaciones de casos debería contener como caso a la propia extensión que de hecho no puede ser caso, luego esta generación de extensiones solo la podemos aplicar a las extensiones que son también casos-nombrados. Le llamamos la extensión potencia de una extensión dada, como ya hemos escrito, se denota como$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ la extensión potencia para la extensión $\mathcal{A}$: enumera todas las posibilidades de notas y de hecho podremos decir:

$$\begin{aligned}&{}^{nt}\mathcal{A} = \\ &= \bigwedge\left[{}^{nt}\emptyset,{}^{nt}\{\mathfrak{a}\},{}^{nt}\{\mathfrak{b}\},{}^{nt}\{\mathfrak{c}\},{}^{nt}\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\},{}^{nt}\{\mathfrak{a},\mathfrak{c}\},{}^{nt}\{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\},{}^{nt}\mathcal{A}\right] = \\ &= {}^{nt}\{\mathfrak{a}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{b}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{c}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{a},\mathfrak{c}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\} = \\ &= {}^{nt}\{\mathfrak{a}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{b}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{c}\} = \\ &= {}^{nt}\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{a},\mathfrak{c}\}\wedge{}^{nt}\{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}\end{aligned}$$

Si ponemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y viceversa. Hay que pensar que aquí la palabra ***todas*** quiere decir exactamente que cada caso tiene que estar nombrado de alguna forma.

Como ejemplo de una potencia de una extensión que no puede ser caso es importante: $\mathcal{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$, que nos hace pensar en el mal comportamiento de esta operación sobre una extensión cuando se realiza fuera de su dominio propio. Esta operación tiene sentido porque hemos llegado a que las notas que habitaban en lo definible de la idea general ha pasado, mediante la transformación que hemos hecho para llegar a la extensión-nombrada, a ser notas separables y distintas, y por lo tanto, también las notas son ahora extensiones-nombradas.

La extensión potencia de una extensión que puede ser caso-nombrado representa con fidelidad todas las notas-nombradas de esa extensión mediante el predicado binario de pertenencia a uno de los casos de la potencia.

Todas las transformaciones-nombradas que van de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, no son más que los casos de $\mathcal{P}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ que constituyen las extensiones-relaciones entre esas dos extensiones (desde $\mathcal{A}$ hasta $\mathcal{B}$).

Este apartado, por técnico, no va a ser analizado aquí, pero nos proporciona junto con los anteriores un lenguaje completo dónde el léxico y la sintaxis son ya acordes, nos da un análisis entre las cosas suficientemente distintas de la igualdad de extensiones, y podríamos ya erigir un lenguaje formal.

3.12. La introducción de la diferencia: generadores y principios homogeneizantes

Es nuestro interés, en los apartados numerados siguientes (que siguen nombrando extensiones como hasta ahora), a partir de indicios dados en el pensar las ideas generales, y en el cómo las pensamos, darnos cuenta que las introducciones que vienen ahora en nuestro léxico son radicalmente distintas a las anteriores[60]: el lenguaje anterior responde a la superación de las insuficiencias del lenguaje propio de las ideas generales. Las ideas generales piensan unificando la pluralidad de los abstractos, piensan los abstractos, pero como unificación de ellos. Es una pérdida continua de notas, que no tiene final. Desde esas ideas, más sencillas que el abstracto, no pensamos nada propiamente nuevo. Por lo *menos en cuanto a notas, si se nos permite, en cuanto a predicados. Hay claramente objetos nuevos, con una finalidad específica, la de pensar unificando la experiencia: haciendo la experiencia más sencilla de comprender.*

¿Qué es lo que se introduce nuevo? Lo nuevo. Esto es, a base de unificar la experiencia no podemos más que pensarla, por decirlo de alguna manera, no tenemos nada que hacer, solo manejar la experiencia en el pensamiento. La igualdad, en sí, no dice más que la idea general, dice infinitamente menos. El lenguaje lógico-matemático que hemos podido instanciar, no tiene objetivo alguno si no introducimos lo diferente, y de manera suficiente que nos permita de alguna forma pensar, aunque sea, como ya hemos visto hasta ahora, de forma pura. Dedicar el lenguaje lógico-matemático a las ideas generales no tiene finalidad de interés, porque se mueven en ámbitos radicalmente distintos, el que siempre está atado a la experiencia, y el que en absoluto tiene que ver con la experiencia.

Pero lo nuevo no está. En todo el proceso de unificación de la experiencia en las ideas generales, hemos ido perdiendo notas, y ahora estamos sin notas reales (efectivas), esto es, procedentes del abstracto. Si no podemos generar distinciones a partir de aquí, habremos superado las insuficiencias de la generalización, pero sin objetivo alguno, sin más tarea que hacer. Sin embargo las matemáticas piensan una gran cantidad de distinciones, eso si, puras, únicamente pensables, sin relación alguna con el abstracto.

3.12.1. Nombrando efectivamente casos

Los casos podremos nombrarlos de muchas formas, pero tenemos que nombrarlos de alguna forma concreta, y podemos empezar por nombrar el caso extensión $\emptyset$. A partir de aquí podemos empezar a nombrar casos como extensiones nominales (nada lo impide), por ejemplo, $0 = \{\emptyset\}$, $1 = \{\emptyset, 0\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $2 = \{\emptyset, 0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ y así (los nombres de $0, 1, 2$ son para acortar la notación). A partir de aquí podemos nombrar las extensiones que pensemos según las relaciones-reglas anteriores. La extensión 1 la hemos construido a partir de la extensión 0, mediante el nombramiento de la extensión $\{\emptyset\} \cup \{0\} = 0 \cup \{0\}$, la extensión 2 mediante la extensión $\{\emptyset\} \cup \{0\} \cup \{1\} = 0 \cup \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}$. Pero no sabemos como extender este pensable: ¿qué quiere decir "y así"? Podemos nombrar una extensión-nominal ω[61], tal que sus casos sean los que hasta ahora hemos nombrado entre otros. Pero queremos algo más: poder nombrar un *generador-nominal*[62]: que nos dé sucesivamente todos los casos-nominales (o una parte importante de ellos al menos).

3.12.2. Advertencia del principio de inducción matemática (o de los números naturales)

Hay un pensable que se da con mucha naturalidad: *en la misma manera algo más y diferente de lo hasta ahora*. Este pensable es natural porque siempre podemos pensar más, y aún más en el campo del hábito. El problema es nombrarlo. Nombrar ese *en la misma manera algo más y diferente de lo hasta ahora*.

Hasta ahora hemos dicho el 0, el 1, el 2, y el esquema es: una extensión nombrada n (que ya ha podido ser nombrada), entonces decimos $\sigma(n) = n \cup \{n\}$[63]. Exige una homogeneidad entre caso-nominal y extensión-nominal. Las transformaciones las habíamos hecho sobre extensiones ya nombradas y el problema es que esta transformación no ha sido nombrada aún. Así que necesitamos una nueva forma de nombrar. Un caso del nombrar *en la misma manera algo más y diferente de lo hasta ahora*, es un esquema de extensiones al que le damos la posibilidad de ser nombrado como extensión[64]. Solo queda ver cómo hemos nombrado los casos. El primero lo nombramos directamente, $\{\emptyset\}$. Los siguientes son simplemente la repetición de la generación $\sigma(\{\emptyset\})$, $\sigma(\sigma(\{\emptyset\}))$. Por aplicación recurrente de la transformación-nominal σ empezando por $\{\emptyset\}$, obtenemos la extensión ω de los números naturales. ¿Cómo justificamos este nombrar? No es más que el pensable: una abstracción y después otra y después otra y así la experiencia cuenta con todas y es su totalidad. Pero esa advertencia es finita siempre: pero pensamos que podría no serlo, puesto que es prolongable indefinidamente (podemos dilatar el final) y así construimos la recursividad. Los números (la extensión-nombrada ω que ya hemos notado) no sabe de finitud pues las abstracciones no sabemos dónde pararán en su flujo, y si no sabemos dónde terminarán en su flujo, podemos construir un pensable que constituya un flujo infinito. La extensión ω es pensar por primera vez más que toda la percepción en su conjunto, incluso llegando a la imposibilidad temporal. *La transformación **siguiente*** es solo una de las *en la misma manera algo más y diferente de lo hasta ahora*.

Me detendré brevemente en este punto. Démonos cuenta que σ genera a partir de cada caso-nombrado uno nuevo y distinto. Ahora podemos considerar que todos los elementos generados por $0 = \{\emptyset\}$ y la transformación *siguiente* σ aplicada sobre cada nuevo caso-nombrado genera ω, así que estamos nombrando esta extensión por un solo elemento original mas la transformación *siguiente*, que nombra de manera clara el caso formado: que la extensión no tenga un último elemento no ofrece ningún problema ya que está perfectamente definida la extensión y cada uno de sus casos. En el campo de las extensiones-nombradas no existe la potencia o el acto: de hecho sí existe, cada pensable nombrado es, si se consigue la objetividad, acto inmanente de una facultad del entendimiento: el logos.

Solo decir que si miráis con detenimiento la extensión-nombrada ω , de dos casos-nombrados será uno menor al otro siempre que $(\forall \mathfrak{a}\mathfrak{b})\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \boldsymbol{\omega})$, si y solo si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$. Esto es, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$. Además, en esta construcción (ahora no me importa utilizar este término), podemos definir $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ si y solo si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Luego en esta construcción de los naturales pensados, es lo mismo ser un caso que ser sub-extensión, o por decirlo llevándolo al terreno de la experiencia acumulada de abstractos, si un caso-nombrado representa el primer abstracto que consideremos y la experiencia acumulada hasta ahí, los siguientes son las acumulaciones sucesivas. La generación-nombrada siguiente responde a la articulación del tiempo por la operación de abstracción. Sea ω' una sub-extensión de ω tal que $0 \in \omega'$, y $(\forall \mathfrak{a}\mathfrak{b})\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \boldsymbol{\omega'})$ ocurre que $\sigma(x) \in \omega'$ entonces $\omega = \omega'$. Este es el principio de inducción matemática: si una propiedad de algunos abstractos incluyen el primero y sigue la ley de acumulación de experiencia, todos los abstractos de toda la experiencia deberían tener esa misma propiedad. De alguna forma es la inducción incompleta habitual advertida y nombrada completamente: ya no es experiencial. Debidamente nombrado el léxico y establecida la sintaxis tenemos todos los elementos de la aritmética de Peano cumplidos en ω.

Es claro que no hemos dejado exhausto de posibilidades el *en la misma manera algo* *más y diferente de lo hasta ahora*. Hemos tratado parcialmente esa advertencia general, que claramente no tiene porqué tener un acabamiento. De hecho pensemos que esta advertencia puede ser tratada y hay una exhausción de la advertencia: nos encontramos con que con lo expresado hasta ahora no podemos hablar de los números reales. Para hablar de números reales hemos de poder nombrar un principio diferente, que nos da un generador de relaciones-nominales entre extensiones que hasta ahora no hemos podido escribir: el llamado principio de elección, o de buen ordenamiento o lema de Zorn como principio homogeneizante para el tratamiento de los reales en el análisis matemático. Es esperable, no solo que vayamos encontrando en matemáticas nuevos generadores de objetos matemáticos que vayan explotando el pensable *de la misma manera algo más y diferente de lo hasta ahora*, sino que encontremos nuevos pensables que inspiren nuevos principios.

La diferencia de lo que encontremos con el principio de inducción matemática es que de éste lo advertimos como válido, esto es, es pensable que las abstracciones no terminen nunca. Las siguientes habrán de confrontar el no ir contra los pensables hasta ahora nombrados y es un tema completamente abierto.

4. Del pensamiento de las diferencias y el logos matemático

Aventuro un principio del logos matemático:

La matemática piensa de manera explícita las diferencias extrínsecas a lo físico extra-mental, la diferencia siempre homogénea en cuanto que pensable objetivamente, y sólo el logos matemático puede hacerlo[65], es el único lugar del entendimiento que puede hacer esto, y sin ese pensar lo diferente explícito sin pugna y extrínseco no termina de cuajar en el sentido de superar las insuficiencias del pensamiento generalizador.

Sin duda es una afirmación fuerte. Vamos a pensarla:

4.1. Justificación de que solo el logos piensa genuinamente las diferencias extrínsecas

Vamos a ver dónde (en el intelecto humano) se piensan las diferencias y cómo se piensan éstas.

4.1.1. En el abstracto *(ahora)*

El pensar abstracto nos permite vivir en nuestro mundo, nos da la conexión sensible del entendimiento y permite el lenguaje en su forma primaria. El abstracto no piensa diferencias. El pensar abstracto nos da el objeto ya hecho y su pretensión primera es exactamente la mencionada, obtenemos lo que hay, es el ahora. El *ahora* como tal se piensa sin diferencias como *ahora uno*. Teniendo en cuenta que *el abstracto* es *una diferencia en el pensamiento* él mismo.

4.1.2. En la razón que pugna por la realidad extra-mental

La razón que pugna, partiendo del abstracto, se interna en la diferencia implícita, esto es, en lo implícito que hay en el abstracto, la noción de su novedad respecto a su entorno cognoscitivo inmediato, consiguiendo darnos razón del mundo extra-mental como con-causalidad plural de con-causas, y éstas como diferencias intrínsecas de lo extra-mental. Estas con-causalidades, en su primera etapa, la del concepto, nos desvelan un mundo difícil de conocer y de poner en conexión con lo que el entendimiento hace: pensar y objetivar cuando esto es posible. Pero las con-causalidades no son objetivas en ningún caso. Este análisis de la con-causalidad como implícita en el abstracto es lo que llamamos física, en el sentido antiguo y medieval, física no matemática, física filosófica. Ésta es una de las formas de analizar la diferencia: pero es implícita a nuestro pensamiento abstracto y hay que pugnar con lo pensable para "quitar lo exclusivamente pensable", no es explícita de manera directa objetiva, y nunca totalmente objetivable. El mundo extra-mental, en tanto que tal se desvela como complejo, con pocos asideros para pensarlo en tanto que tal, en tanto que no pensado, sino que es, y es a nivel mínimo, con-causal. Ésta razón que pugna nos desvela la diferencia que es intrínseca a lo extra-mental[66].

4.1.3. En el pensamiento generalizante (o negador de notas)

El pensamiento que niega notas, que genera ideas generales, es un pensamiento que consigue con facilidad objetos: pero, ¿qué nos dicen esos objetos? Esos objetos nos hacen pensable el mundo en que vivimos, el que nos presenta el pensar abstracto (en cuánto que nos evade de la totalidad del abstracto primero). Pero para pensarlo lo reduce. Lo hace igual. Establece una especie de equivalencias entre los abstractos que de alguna manera entran en las ideas que los remiten. Al contrario que pensar diferencias las elimina. De hecho, el pensar generalizante en ningún momento puede reconstruir los niveles que están por debajo. La definición clásica de definición no funciona: la definición es el género más la diferencia específica. Pero por la forma en que trabaja la generalización, precisamente la diferencia específica no se piensa, se pierde, cuando damos diferencias específicas no podemos reconstruir realmente la especie del género. La negación de notas no aporta ningún análisis de la diferencia. Se obtienen diferencias, si, pero *a posteriori*, habiendo perdido la mayoría de lo que había en el abstracto o en la especie.

4.1.4. Nota: en los hábitos del intelecto

No entramos a ver qué es lo que pensamos en los hábitos de pensamiento, para comenzar porque son hábitos y lo que piensan nunca son objetos. Piensan lo pensado con su operación, y apuntan, mediante intuición. La dificultad de estudiar estos pensamientos hace que nos centremos fuertemente en los objetos pensados. Por eso, a falta del *juicio* y del *fundamento*, que nos obliga a que el logos estudiado no sea completo, el estudio del lugar de las diferencias objetivas pensadas lo considero completo.

4.2. ¿Como pensar diferencias extrínsecas? (¡Explícitamente!)

Hemos planteado el problema: ¿como pensar diferencias extrínsecas (explícitamente)?

El siguiente paso es sencillo: la matemática ha ido mucho más allá del pensar generalizante, se ha quedado en el esquema puro. La pregunta no es cual es el contenido de las matemáticas, sino sobre qué versa ese contenido. Si versara sobre la igualdad que ya hemos presentado, se quedaría en absolutamente nada. Decir $A = A$, simplemente no interesa a ningún matemático, y menos a nosotros en nuestro pensar el pensar. La igualdad es algo en relación con un lenguaje, pero si solo nos remitimos a lo obtenido en los anteriores primeros cuatro puntos, no se puede decir prácticamente nada más, solo si desarrollamos conjuntos finitos y pequeños en general, pues el lenguaje resultante se hace aterradoramente farragoso. Sin embargo es claro que hemos conseguido formalidades puras.

Hablar de formalidades puras nos habilita para sugerir: ¿no podríamos generar elementos (formales) distintos unos de otros y preguntarnos por sus diferencias? Pues eso es lo que hacemos: generamos los números naturales, generamos los números reales y en general, generamos conjuntos en cantidad suficiente para establecer un lenguaje formal que nos ofrezca el análisis de las diferencias (generadas por los distintos principios matemáticos axiomáticos admitidos y en cualquier forma completamente explícitas) que sea jugoso en cuanto a contenido. Con solo los números naturales somos capaces de hacernos una cantidad de preguntas tal que no bastan los números naturales para contestarlas. Igualmente podríamos decir de los reales. E idénticamente de cualquier conjunto de elementos formales distintos, una vez no sea finito. Pero esta progresión nos hace posible tratar de todos los conjuntos finitos de forma homogénea, sin atender a cuántos sean los elementos, una vez introducidos los números naturales.

¿Como hace la matemática para analizar las diferencias extrínsecas, esto es, que ella misma pone? El proceso temporal es más o menos así: primero genera diferencias (los números por ejemplo, o los conjuntos finitos), si es necesario, una vez generadas establece nuevos conjuntos que traducen los generadores en relaciones-transformaciones, después agrupa mediante equivalencias (igualdades) y, si es conveniente, establece principios homogeneizantes para tratar fructíferamente las diferencias, desarrolla matemáticas y vuelve a buscar más diferencias. Pone los números naturales, y ahora los agrupa en pares e impares y mira que diferencias hay entre ambas clases. O entre números mayores que una determinada cantidad y menores y vuelve a proceder a mirar qué diferencias hay. Por lo general, algún orden. Cuando está suficientemente explotado el tema comienzan a surgir nuevas diferencias, que vienen en aluvión, y de nuevo buscamos procesos de equivalencia con los que homogeneizar éstas o principios homogeneizantes totalmente nuevos. Y aparecen con el tiempo más diferencias...

¿Qué falta por pensar en esta etapa? Dos elementos formales se me ocurre que inicialmente son distintos, con el proceso anterior podemos llegar a ver que bajo alguna equivalencia podemos llegar a afirmar una cierta igualdad, aunque sean inicialmente distintos. Ahora solo queda por ver los aspectos en que son intercambiables, su valor, y en lo que son distintos.

$2 = 1+1$. En la consideración de la asimetría de los dos lados de la expresión alrededor del signo igual surgen las preguntas que rondan lo dicho en el párrafo anterior. La pregunta es ¿en qué se diferencian 2 y $1 + 1$ y en qué son iguales? Porque si en nada se diferencian, nos acosa la pregunta ¿qué nos dice?, pero si en nada son iguales el signo $=$ no tendría lugar. Nos encontramos, por ejemplo, con el análisis de Frege de *sentido y referencia*[Frege, 1892]. Sentido es el pensamiento propio de 2 y de $1 + 1$ que se diferencian como representaciones de la conciencia, y la referencia es el valor de 2 como objeto al que se referencia y el valor de $1 + 1$ como su objeto propio o los objetos verdadero o falso de toda la expresión de igualdad propiamente dicha, que será verdadero si la referencia de 2 es exactamente la de $1 + 1$ y falso en otro caso. Para Frege, ese es el primer análisis de la igualdad matemática, y en general, de las afirmaciones matemáticas que hemos visto hasta ahora.

Pero la perspectiva fregeana incluye *Lo Verdadero* y *Lo Falso* como ideas u objetos en sí. Ha remitido históricamente a lo que se ha pasado a llamar platonismo matemático, que, si no me equivoco, no es más (ni menos) que platonismo. *Lo Verdadero* ha de ser un objeto separado de nuestro pensamiento. Pero en nuestra teoría del conocimiento hemos visto desde lo más temprano que el conocimiento no es en modo alguno pasivo sino que se da en el movimiento inmanente de una operación cognitiva, el objeto en ningún momento es independiente del intelecto. Sin embargo, es cierto que o bien es correcta esa igualdad, o bien es incorrecta (verdadera o falsa). También es cierto que parecen remitir el objeto derecho de la igualdad y el izquierdo a representaciones diferentes: pero esto último bien podría ser una mera apariencia, esto es, son psicológicamente diferentes, pero no como objetos del logos matemático. Bien merece echar una ojeada a este tema, ya que es el tipo de expresiones (objetos) matemáticas más sencillas que han de ser verdaderas o falsas.

Tendremos en cuenta las siguientes definiciones para el número natural:

1. $0 \in \omega$. El 0 es un número natural por definición o nombramiento. Se definirá más con cada extensión del lenguaje.
2. $(\forall \mathfrak{n})\,(\mathfrak{n} \in \omega) \;:\; (\exists \mathfrak{m})\,(\mathfrak{m} \in \omega) \;:\; \mathfrak{m} = \sigma(\mathfrak{n})$. El generador siempre es aplicable a todo número y siempre genera si se aplica a naturales y lo que genera son siempre naturales.
3. $(\forall \mathfrak{n})\,(\mathfrak{n} \in \omega) \;:\; \sigma(\mathfrak{n}) \neq 0$. El 0 no es generado por el generador *siguiente* sino puesto directamente en el punto primero. Esto evita que haya números naturales menores que 0.
4. $(\forall \mathfrak{n})\,(\mathfrak{n} \in \omega) \;:\; \sigma(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{n}$. Se generan números siempre nuevos y diferentes a todos los anteriores.
5. $(\forall \mathfrak{n}\mathfrak{m})\,(\mathfrak{n}\mathfrak{m} \in \omega) \;:\; \sigma(\mathfrak{n}) = \sigma(\mathfrak{m}). \Rightarrow .\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$. Esta regla nos define mejor el generador *siguiente*. Aplicado a dos números, si se genera el mismo número es porque proceden exactamente del mismo.

6. $(\forall\mu)\,(\mu \in \boldsymbol{\mathcal{P}(\omega)})\ :\ ((0 \in \mu) \wedge ((\forall \mathfrak{l})\,(\mathfrak{l} \in \mu)\ :\ \sigma(\mathfrak{l}) \in \mu)). \Rightarrow .\mu = \omega$. Este es el principio de inducción matemática que pone orden y homogeneidad a todos los números naturales, de forma que pueden ser tratados como una unidad, esto es, un conjunto.

Las siguientes nos definen qué es sumar, y se define fácilmente gracias al principio de inducción matemática.

1. $+ : \omega{\times}\omega \longrightarrow \omega :: \langle n, 0\rangle \mapsto n + 0 = n$. Es la regla básica para sumar 0 a cualquier número.
2. $+ : \omega{\times}\omega \longrightarrow \omega :: \langle n, 1\rangle \mapsto n + 1 = \sigma(n)$. Es la regla básica para sumar 1 a cualquier número[67].
3. $+ : \omega{\times}\omega \longrightarrow \omega :: \langle n, \sigma(m)\rangle \mapsto n + \sigma(m) = \sigma(n + m)$. Es una regla general para sumar cuando el segundo número de la suma es generado.

Para comenzar hemos llegado al logos mediante la formalización de los elementos generalizantes del pensamiento. Hemos visto que germinalmente 2 se define como $\sigma(1)$[68]. Luego tenemos un sentido de la igualdad, al menos en este caso, que solo es nombrar como definir. Luego es un error decir que son sentidos objetivos diferentes. Son lo mismo en tanto que objetos. Tienen expresiones escritas diferentes porque es conveniente para ahorrar en el escribir. Y es claro que en una gran cantidad de casos la igualdad nos remite directamente a una definición. La definición es verdadera con tal que no nos lleve a contravenir la regla de no-contradicción.

Así que veremos algún otro caso que no nos remita directamente a una definición. Por ejemplo $4 = 2+2$. Por definición $2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sigma(1)$ y $4 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sigma(\sigma(\sigma(1)))$. Así la igualdad puesta, es originalmente, $\sigma(\sigma(\sigma(1))) = \sigma(1) + \sigma(1)$. Ahora nos remitimos a la definición del signo $=$. Pues bien, en una serie de pasos esa igualdad se resuelve en las definiciones dadas. Luego es análisis puro de las definiciones hechas y las diferencias generadas.

Veamos:

$$\begin{aligned}
2 + 2 \stackrel{a}{=} \sigma(1) + \sigma(1) &\stackrel{b}{=} \\
\stackrel{b}{=} \sigma(\boldsymbol{\sigma(1) + 1}) &\stackrel{c}{=} \\
\stackrel{c}{=} \sigma(\boldsymbol{\sigma(\sigma(1))}) &\stackrel{d}{=} \\
\stackrel{d}{=} \qquad\qquad\qquad\quad &\stackrel{d}{=} 4
\end{aligned}$$

69

Recurriendo siempre a las definiciones y permitiéndonos sustituir una notación por su definición hemos resuelto el interrogante. Luego esa igualdad, que inicialmente no es una definición se resuelve en definiciones. Luego no son objetos diferentes en ningún momento. Si que es cierto que inicialmente podríamos no saber si la igualdad se resolvería en verdadera o falsa, pero finalmente encontramos que es verdadera porque se disuelve en las definiciones de suma, generador siguiente y números naturales. Para encontrarla falsa debíamos de haber encontrado que lleva a contradicción: eso es lo nuclear de lo falso en matemáticas. Encontramos que lo verdadero y lo falso se disuelve en los principios con los que hemos comenzado la andadura en el logos matemático.

Ahora bien, dada una igualdad o una fórmula en matemáticas (que afirme o niegue, no que nombre), sobreviene la siguiente pregunta: ¿la podremos siempre disolver en las definiciones previas y los principios desde los que comenzamos? La respuesta es no (es el resultado de incompletitud de Gödel de 1931). ¿Quiere decir esto que hay igualdades o fórmulas no definitorias que son indiferentes? Lo que el resultado de Gödel demuestra es que existen proposiciones *verdaderas* que no se siguen de los principios: esto quiere decir que las preguntas sobre la verdad o falsedad de una expresión matemática nos obligan a seguir formalizando nuevos principios fundamentales del logos. El logos no se agota en un repertorio ya conocido y acotado de principios, sino que a partir de la generación de diferencias explícitas y la ficción de expresiones sobre esas diferencias, nos obliga a explicitar nuevos principios formales que exploran el logos. Los fundamentos formales actuales del logos no pueden agotar los interrogantes actuales del logos. Así la pregunta sobre si cualquier expresión matemática susceptible de verdad o falsedad es necesariamente verdadera o falsa, solo remite a si los (posiblemente) principios formales-fundamentales nuevos que impliquen han de ser aceptados o no en el logos. Esta cuestión, al no ser propiamente sintáctico-matemática y por lo tanto formal remite a una comprensión más profunda sobre qué es lo que realmente estamos explorando en el logos.

Siguiendo la línea del pensamiento fregeano sobre la igualdad (lo mismo vale para la pertenencia o la inclusión), vemos que el sentido fregeano de los objetos del logos son el mismo si son formalmente iguales. En principio, la pareja *sentido/referencia* parece más pensada para los objetos de la generalización, ya que hablar de sentidos diferentes en dos objetos formalmente equivalentes o iguales no es más que referirse a las motivaciones psicológicas o las representaciones imaginarias de las mismas. La formalidad matemática propiamente dicha es auto-explicativa, se discierne a sí misma en el logos. Podemos hablar de representaciones propias de los objetos del logos siempre que estas representaciones sean totalmente formales: la representación de un objeto del logos es tan formal como el objeto mismo: *los objetos del logos son simples, sin guardas ímplicitas no objetivas, sin* ***referencias/intenciones*** *distintas de la definición en la que se disuelven, sin composición* ***sentido/referencia****, sin compensación alguna.*

Bien, el problema que habíamos planteado es ¿qué nos enseña una expresión matemática que ha de ser verdadera o falsa? Si es pura analiticidad, parece más bien que no trae nada nuevo, esto es, no debería de consistir mas que en una disolución sin más en *lo mismo*. Sin embargo hemos visto que realmente una igualdad nos habla normalmente de expresiones cuyas partes se disuelven en *lo mismo*. Pero podemos darnos cuenta que estamos generando diferencias y las estamos relacionando formalmente. Esto es lo que se puede hacer para pensar diferencias más allá de explicitarlas. Para ello el logos genera diferencias de forma homogénea. Por ejemplo, los números naturales están generados de manera homogénea gracias a la admisión del principio de inducción matemática, sin el que la variabilidad de las diferencias introducidas por el generador σ se vuelva inmanejable. El generador *siguiente* da la variación y el principio de inducción nos da la homogeneidad que hace de los números naturales un conjunto pensable como totalidad. De la misma manera, las sucesiones (infinitas en general) de números racionales generan mediante cortaduras de Dedekind o sucesiones nulas equivalentes de Cantor los números reales, así que son el elemento generador de diferencias (cada número real), pero necesitamos del principio formal-fundamental de elección para homogeneizar los números reales (las diferencias introducidas): hace de estos un conjunto completo en tanto que no deja "huecos", y además mantiene el orden de los números racionales en los reales, ampliándolo, son un orden lineal. El principio de la potencia del continuo de Cantor (*hipótesis del continuo*) pondría cierto orden homogeneizante en las diferencias introducidas por los conjuntos que no son clases propias y la generación de extensiones-nombradas potencias de otras extensiones. Me atrevo a decir que se ha de admitir todo principio formal-fundamental que a la vez que ayude a homogeneizar diferencias (y por lo tanto a generarlas) dé también máxima amplitud (mantenga la máxima consistencia) para las posteriores ampliaciones de principios formal-fundamentales, esto es, convierta al logos matemático en el campo de análisis de todo lo que no sea formalmente contradictorio como un todo y no como el estudio de distintos juegos de principios no completamente conectados. Visto así, la verdad del logos no es más que el camino para analizar la no-contradicción formal en toda su amplitud: el principio lógico de no-contradicción sería mucho más que la regla de no-contradicción. El principio lógico de no contradicción sería inabarcable en una sola mirada, pero sería explorable de forma fundamental por el hombre en forma objetual pura. No digo con esto que el principio lógico de no-contradicción se confunda con el principio real de no-contradicción, que de forma clara no lo es, sino que es la única forma de recorrer *teselando* de forma homogénea (en lo que se pueda) mediante objetos-puros-formales el principio real de no-contradicción.

Ahora tenemos que el principio lógico de no-contradicción estaría formado por la igualdad formal o principio de lo mismo, la pertenencia (que viene del ser caso de), las clases y los conjuntos (que son clases que pueden ser casos), las reglas de no-contradicción y de tercio-excluido, el objeto $\emptyset$ y el $\mathfrak{U}$, las operaciones de conjuntos, la regla generadora siguiente σ, el principio de inducción matemática, el axioma de elección y las equivalencias de sucesiones nulas[70] conforman casi toda la matemática o principio lógico [71] de no-contradicción [72] actual, que no sería más que la forma objetual de exploración del principio real de no-contradicción o ser del universo extra-mental.

Queda por delante una labor grande de pensar el logos. Una tarea inminente es conocer los objetos del logos más de cerca pero como objetos del logos, por ejemplo, ya que no hay hay intencionalidad en los objetos del logos ¿hay algún paralelismo con el concepto y la razón que pugna? Otra pregunta importante es ¿como nos ayudan las diferencias generadas explícitas, extrínsecas y homogéneas a conocer la con-causalidad que son diferencias implícitas en origen, intrínsecas fuertemente heterogéneas? En el caso que las diferencias del logos realmente nos aproximaran aspectualmente las diferencias implícitas extra-mentales, ¿quedarían aspectos de las diferencias implícitas totalmente inconexas de la indagación del logos? Por otra parte llamamos al logos, logos unificante, porque de alguna forma unifica los dos caminos emprendidos por el entendimiento: el generalizante y el explicitante de las diferencias implícitas del abstracto. Si esto es así, nos daría pie a investigar todas las preguntas anteriores, además, porque si encontramos como es esa unificación, podremos ver en qué manera se relacionan las ideas puras del logos con la con-causalidad, cosa que realmente es central.

Solo vamos a pensar en estas líneas sobre un par de aspectos de los mencionados.

El primero la intencionalidad. Las ideas puras del logos no remiten (así lo hemos visto) a nada fuera del ámbito del logos. En ocasiones, en contadas investigaciones matemáticas, aparecen nuevos principios formal fundamentales. Estos principios efectivamente, aunque se formalizan, porque es la forma de trabajar en matemáticas, su validez no es formal, ya que su validez o verdad hay que encontrarlas *a posteriori* para establecerlas como principios *a priori* en el resto de la investigación. ¿A qué remiten esos nuevos principios que son básicamente ortogonales a todos los demás ya establecidos? Remiten al hecho de ser totalmente independientes de ellos, que es lo mismo que decir que para los principios anteriores la falsedad y la verdad del nuevo principio es intangible, por lo tanto el nuevo principio remite básicamente al logos como tal, su verdad o falsedad no puede ser externa al logos ni a ningún principio ya conocido del logos. El logos es de esta manera la referencia de cualquier principio formal-fundamental, *todo el logos*. Y lo referencia como lo que le da razón de ser pensado, lo que lo valida.

¿Cómo es la intencionalidad del concepto que explicita las diferencias implícitas del abstracto? De nuevo no existe. De alguna manera, la analítica de la con-causalidad al nivel del concepto parece cerrada, no porque no podamos encontrar nuevas concausas o nuevos análisis que nos lleven más allá en el conocimiento físico extra-mental, sino porque en ningún momento un abstracto concreto aportará una diferencia nueva o más concreta o más explicativa, lo que la razón explicitadora hace es de un terreno que solo nos lleva hasta el juicio para completar la tetraconcausalidad (el estudio conjunto de las concausalidades con la causa final o principio de orden, la necesidad física).

Así, en el nivel del concepto, ni el concepto ni la idea pura conceptoide remiten más que a su propio ámbito y no tienen intención. Lo que en el logos es formalidad objetual pura, en la razón explicitadora es a duras penas objeto ni mucho menos formal. Pero son dos ámbitos en los que encontramos diferencias, y los objetos no tienen intención alguna y la remitencia es al propio ámbito del pensamiento en el que se generan. Es un parecido que a primera vista no parece decirnos demasiado. Habrá que seguir investigando para encontrar porqué se asemejan.

De otro lado hay otro parecido. Cuando hablamos de con-causalidad comparece como primera provisión el *concepto hilemórfico*: concausa formal, concausa material. Cada concausa formal es una diferencia implícita, es lo más pensable de lo real extra-mental. Solo que lo pensable a duras penas puede ser realmente la causa formal. Pero lo formal es *lo unitario del compuesto hilemórfico*. La causa formal, al dar forma a concausas materiales hace aparecer los compuestos hilemórficos mínimos, mímimamente estables. La estructura fundamental encontrada en el logos es la de *conjunto/elementos*. El conjunto es lo unificador del conjunto, la unificación misma. Los elementos son la pluralidad de formas que comparten la forma del conjunto. El proceso típico en matemáticas lo que hace es intentar tratar el conjunto como un todo, ya que si no es así los elementos se desperdigan sin forma unificada. Así el conjunto de los números naturales tal como lo hemos definido es ω, que son los elementos (los números) más el principio unificador de la inducción matemática. El generador *siguiente* nos da los diferentes números, pero para ser tratados como teniendo una forma común han de ser un conjunto, y para esto es necesario el principio de inducción. Lo informe aquí son los números al generarse, la forma aquí es el principio de inducción que unifica los naturales (y los hace tales). El par *conjunto/elementos* tiene de esta forma un parecido grande con el *compuesto hilemórfico*. Aún más, el principio generador genera números no hechos todavía, y cobran forma definitiva con el principio de inducción que sería una forma paralela a la causa formal (salvando unas distancias astronómicas). Los elementos generados directamente actúan a modo de materia que ha de ser informada por el principio de inducción. En este sentido, los conjuntos y sus elementos exploran de forma aparente la formación de lo que está por formar. Con todo, los elementos ya son conjuntos ellos mismos y tienen forma propia. Así que la generación de conjuntos de conjuntos ya conocidos es una exploración de la formación de formas cada vez menos homogéneas, cada vez más complejas.

5. Miscelánea

Vamos aquí a remarcar algunos puntos que aclarar o que han quedado perdidos porque no han salido al paso en nuestro pensar o por constituir temas que se apartan de lo aquí central.

5.1. Procedimiento seguido: los casos

Los casos intrínsecos e implícitos a las ideas generales han sido son todos trasladados a extensiones-nombradas que, una vez terminadas todas las definiciones, ya llamaremos clases o conjuntos, exceptuando las clases propias como $\mathfrak{U}$. Los casos han pasado a ser separables de las ideas generales como *elementos* de un conjunto o clase. El elemento queda perfectamente fijado por las reglas de uso de $\in$.

5.2. Procedimiento seguido: la idea general como definición

Los géneros o definiciones-intentadas de las ideas generales han sido todos trasladados a extensiones-nombradas que, una vez terminadas las definiciones de forma compacta, ya llamaremos clases o conjuntos, exceptuando conjuntos *Urelement* como $\emptyset$. Sin embargo, el conjunto vacío queda incluido como conjunto por la construcción léxico/sintáctica. Las definiciones-intentadas de las ideas generales han pasado a ser los conjuntos y clases respecto a sus elementos. Los conjuntos han quedado fijados por las reglas de uso de $\in$, y las clases en general por la relación de $\subseteq$.

5.3. Procedimiento seguido: el definir como nombrar o decir

Las ideas generales ha sido trasladadas de forma no objetiva a las mismas extensiones nombradas y de ahí, ya objetualmente, a las clases o conjuntos (definiciones). Pero estas han de ser perfectamente definidas por alguna forma de nombrar o decir los casos, que vuelven a ser clases o conjuntos. Dado un caso y un conjunto debemos saber que es seguro que o bien el caso está dentro del conjunto o bien, por el contrario, no. Puede que no sepamos cuál es el caso concreto, pero ha de darse por el nombre de la clase que uno de los dos casos es, y nunca los dos a la vez.

De otro lado la igualdad de casos es advertida como mismidad del ahora, y de ahí, mediante las reglas-relaciones anteriores, surge la lógica proposicional básica.

El hipotetizar la existencia de un determinado elemento o conjunto ha quedado facilitado por el medio de nombrar o decir, que es la herramienta fundamental. Con esto podemos introducir la existencia con el no estar en desacuerdo con todas las reglas-relaciones nombradas hasta ahora. La existencia no es más que el ser pensable y decible a partir de todo lo dicho y siempre que no se desdiga. No hay problemas en introducir cuantificadores ni sustituciones de nombres por sus elementos.

5.4. Diferencia entre «*pertenecer a*» y «*ser subclase de*» (nota histórica)

La diferencia principal de los elementos y las clases es en la escritura $\mathfrak{a} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tenemos que $\mathfrak{a}$ tiene comportamiento de elemento y $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de clase. Pudiera ocurrir que además $\subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}$, y en este caso $\mathfrak{a}$ tiene comportamiento de subclase de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, y nunca de elemento. Esta distinción es muy tardía ya en el siglo XIX, dónde en el ensayo "Qué es un número" de Dedekind[Dedekind, 1897][73], aún no queda clara la diferencia entre pertenencia a un sistema y ser subsistema de un sistema (como llama Dedekind a las clases).

5.5. Diferencia entre clase y conjunto

Aún queda una condición para que las extensiones-nominales puedan convertirse en los objetos llamados clases o conjuntos. Distinguiremos entre clases u conjuntos en función si se pueden poner relaciones inyectivas de unas a otras sin incurrir en contradicción (y diré que la clase tiene número o cardinal y entonces es conjunto). Se trata de una condición de separabilidad y de tamaño mucho más estricta que las que se han puesto hasta ahora y son fáciles de escribir en función de lo dado ya. Un conjunto puede aparecer en el lado derecho o el izquierdo del signo de pertenencia indiferentemente, pero una clase que no es conjunto solo aparecerá en el lado derecho del mismo signo. Las clases propias nunca estarán contenidas en los conjuntos, por lo que se suele decir que son excesivamente grandes[74].

Por ejemplo, serán conjuntos las extensiones $\iota_0 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \emptyset$, $\iota_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\emptyset\}$, $\forall n \in \omega : \iota_{\sigma n} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\iota_n\}$, la uniones finitas o infinitas numerables de ellos, las intersecciones finitas o infinitas numerables de ellos, las restas conjuntistas entre ellos, y la totalidad de los conjuntos así obtenidos (lo llamaremos Ω). Es fácil ver que ω puede ser empotrado de forma exacta en Ω. A su vez todas las potencias de los conjuntos anteriormente nombrados son de nuevo conjuntos. Y por lo tanto sus uniones intersecciones y restas. $\mathfrak{U}$ es la clase propia por excelencia, y si $\mathcal{A}$ es uno de los conjuntos anteriormente citados, $\complement\mathcal{A}$ es una clase propia. La delimitación no es clara y depende activamente de los axiomas de nuestra teoría de axiomática de conjuntos.

Si existe una condición más débil para nombrar los conjuntos que la cardinalidad, esto es, si hay clases que no teniendo cardinalidad o número pueden comportarse como elementos sin desdecirse de todo lo anterior es algo que desconocemos hasta ahora, es una pregunta abierta.

5.6. La no construcción de la cardinalidad en el presente texto

Hasta aquí lo que tenemos es que los casos pasan a elementos que son conjuntos y las ideas generales a clases que son los conjuntos y otras extensiones. Las clases son las definiciones que nombran a sus elementos, que vuelven a ser (como conjuntos) definiciones aún más claras, definiciones con número (con cardinalidad), que están perfectamente nombrados. No desarrollaré aquí la cardinalidad ni la ordinalidad en general por ser temas muy técnicos, pero aportan el límite para las clases citado en el punto anterior.

Aún así, la construcción dada de los números naturales, ω, es de un conjunto de ordinales que además es recursivo.

5.7. La indemostrabilidad de la no-contradicción de los números naturales dentro de un sistema formal

Los números naturales ha surgido como una sucesividad aupada al quedarse solo en la dirección de la sucesividad. Ha sido nombrada, y su validez es imposible de mostrar dentro del campo de las cosas perfectamente nombradas y definidas (Gödel, "Sobre la incompletitud de sistemas *PM* y afines"[Gödel, 1931][75]).

5.8. El inacabamiento fundamental de las matemáticas

Las advertencias de nuevos axiomas fundamentales, que hemos llamado *principios formales*, está asegurada por los teoremas de Gödel[Gödel, 1931], que de alguna manera nos dicen que jamás abarcaremos la totalidad de las matemáticas, ya que la totalidad de las matemáticas tiene una realidad no matemática[76]: la fuente última de corrección de las matemáticas queda por ahora en suspenso, y esa fuente no es desarrollo matemático. También por los resultados de Tarski sobre la no definibilidad de verdad en sistemas formales. Y sin embargo las matemáticas consiguen tocar sus propias fronteras con desarrollos como los de Gödel, Tarski y muchos otros, de forma que advierte sus límites y está en condiciones de buscar sus insuficiencias.

5.9. Simplicidad de las ideas puras

Es de interés ver que todo ha quedado resuelto en definiciones o clases. Solo hemos necesitado un *Urelement*, el $\emptyset$, pero éste está completamente definido por no caer elementos bajo él. Ya no es un pensable sino una definición. Se ha disuelto la dualidad intrínseca a la idea general definición-intentada/casos.

Hemos visto que no ha lugar el desdoblamiento de expresiones matemáticas en *sentido/referencia*[Frege, 1892], de forma que lo formal es absolutamente formal.

La intención tampoco ha lugar en las ideas puras pues no esconden implícito alguno.

El logos-matemático es actividad pura del intelecto humano, no separable en ningún momento en un objeto en sí y el logos que lo conoce. Es una generación pura del logos. De aquí que efectivamente el logos constituye un elemento intersubjetivo universal: está en el centro mismo de la intelección humana.

5.10. Relaciones formales, generadores formales, principios fundamentales formales...

Las clases (definiciones) están articuladas entre sí por relaciones que son también clases y que hemos llamado *transformaciones, generadores y principios fundamental-formales unificadores*. El generador $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ genera conjuntos a partir de otros conjuntos. El generador σ genera números naturales a partir de otros números naturales. Las clases de equivalencia de sucesiones racionales convergentes Cauchy que sus restas son convergentes a 0, son los generadores de los números reales. Las clases generadas por $\cup\ \cap\ \setminus\ \triangle \boldsymbol{\mathcal{P}}()$ y el predicado $\in$ nos proporcionan la relación necesaria entre lógica proposicional y conjuntista y generar clases a partir de clases. Las clases se disuelven en relaciones respecto a los elementos que contiene y respecto a las superclases en las que se incardinan y de ahí la igualdad entre clases. A su vez los conjuntos también se definen por las clases de las que son elementos (su definición es mejor nombrada). El propio $\emptyset$ se disuelve en relación: es parte de todo y nada es parte de él excepto sí mismo.

5.11. Lo no experiencial, la ciencia y la técnica

La matemática, una vez depurada y pasada de pensables a lo puramente nombrado, es pensamiento sin relación alguna a la realidad extra-mental ni la experiencia. Esto no quiere decir que no lleve en su interior la semilla del conocimiento de lo extra-mental como universo (ciencia) o el medio de curarnos en el mundo (técnica).

5.12. Objetividad y formalidad

La objetividad alcanzada es la máxima posible ya que no hay nada que conocer mejor en la matemática, solo más matemáticas y esto por que su objetividad es ya formalidad. Pasamos de un objeto matemático a otro por medio de objetos matemáticos (por ejemplo la demostración).

5.13. Suficiencia de las advertencias

En las advertencias anteriores hemos dado pensables más que suficientes para generar un lenguaje formal dónde realizar demostraciones rigurosas. Falta pensar lo que es una demostración y un teorema en relación al conjunto de los objetos matemáticos obtenidos hasta ahora y también respecto a los conceptos de verdad en la teoría del conocimiento y en especial respecto al juicio (respecto a lo último es interesante que no hayamos introducido en toda la lógica matemática el valor de verdad ni el de falsedad).

5.14. Hábito matemático

El punto anterior no debe confundirnos: existe hábito matemático. Sin éste no podríamos encontrar nuevas matemáticas ni responder preguntas, ni llegar a un teorema desde una conjetura y menos a una conjetura. La misma demostración de Gödel de la incompletitud esencial de la matemática se hace de forma objetiva, si, pero mediante el barrunto de la afirmación “esta proposición misma es una proposición matemática que no se puede demostrar desde PM y AP ampliada o afines”, como él mismo explica sumariamente al comienzo de su transcendental artículo.

A diferencia del hábito en otras regiones del intelecto, este hábito solo nos advierte de lo que queda por pensar, de forma que en vez de llevarnos a una nueva región del intelecto, ya que no hay insuficiencia alguna en la pensabilidad y relación nula con la experiencia, nos indica la infinitud de la tarea propia.

5.15. El infinito no es un misterio en el logos

El infinito es perfectamente manejable si es una definición, si es nombre. Toda definición o nombre está sometido a las reglas de las matemáticas, a todo el léxico y sintaxis generadas. Y si lo están no son más misteriosos que cualquier otro objeto del logos.

En matemáticas no hay objetos en potencia o en acto. Solo objetos nombrados. Por otra parte, la noción de objeto es siempre el acto de una operación inmanente de la inteligencia. Infinito en potencia en matemáticas no es más que una confusión que viene de otros ámbitos del pensar.

5.16. Platonismo

Para los que (como es mi caso) vienen del platonismo y se ven algo desasosegados por la pérdida de la idea pura matemática como cosa en sí, hay que decir que en estricta puridad nada ha cambiado: el mundo de las matemáticas sigue siendo el mismo mundo, solo que al pasear por sus cumbres o sus valles estamos paseando por el producto siempre igual a sí mismo, y por lo tanto necesario, de la inteligencia humana (esto es, de la inteligencia que tiene un ascenso y un descenso a lo sensible, lo extra-mental). Hemos añadido un factor que parecía extraño a la matemática: el pensar humano. Pero esto no hace menos necesario un teorema matemático, solo lo encuadra en su lugar natural. Hemos añadido la necesidad de la inteligencia humana con al menos la necesidad de la matemática.

Ahora, los hombres no nos encontramos en un objeto de verdad (referencia común) externo al intelecto, sino en el intelecto mismo.

5.17. Causalidad y formalidad

Las clases constituyen una definición con una relación respecto a sus elementos que se estructura como un compuesto hilemórfico. Al no poder ser todas las clases elementos constituyen un paralelo inestable al compuesto hilemórfico. Sin embargo, los principios unificadores formales (como los de la lógica proposicional y de predicados, la conjuntista, la inducción matemática, el axioma de elección y otros posibles) tienen un papel parecido al de la causa formal, los generadores formales tienen el papel de distribución de la causa formal. Lo material, el elemento, que es propiamente lo distinto, no es separable en ningún momento del resto de elementos. De hecho falta la materia propiamente dicha.

Los conjuntos son un paralelo al compuesto tricausal, más estable, ya que añade la cardinalidad (el número como paralelo del tiempo).

Estas últimas analogías son , lo sé atrevidas y adelantadas a lo que podemos realmente ver hasta ahora, sin embargo merecen pensarse en profundidad.

. . .

6. Epílogo sobre el nombrar

Trato en este apartado de, después de recopilar todo lo hallado sobre el logos y como surge desde el análisis de las ideas generales, hacer algo de síntesis sobre lo que podamos decir del logos matemático.

Hemos visto que el análisis de las ideas generales nos llevaba de una forma muy directa hasta el logos matemático. El logos ha aparecido como el pensar que piensa sin relación al abstracto, a la experiencia sensible. Los objetos del logos son, como todos los objetos del pensamiento, la contraparte de una operación cognitiva: ideas puras. En el análisis de las ideas generales hemos encontrado todo lo necesario para construir la matemática de nuestros días, toda la formalidad requerida. A su vez esto hace sospechar que las ideas generales tienen necesidad del logos para formarse, como uno de sus ingredientes principales. Parece que pensamos ideas aplicando sobre todo la matemática a los distintos abstractos que van fluyendo en nuestra conciencia. Más aún: las ideas generales deben ser condición necesaria para el abstracto. Así que el ascenso abstracto/idea general/logos tiene su contrapartida en la necesidad que tienen los abstractos de las ideas generales y las ideas generales del logos. Esta bicondicionalidad (que no es la única) es de tener en cuenta cuando más tarde volvamos al porqué del improbable éxito del logos matemático en la ciencia moderna (en un próximo estudio que seguirá a éste).

Sin embargo hay al menos dos nociones que pueden ser confusas. Una es el entender el logos como decir, acercándonos sospechosamente al tratamiento que Wittgenstein da a las matemáticas. Sin duda que nos hemos acercado a esa visión de las matemáticas, pero hay diferencias importantes que destacar. La otra noción es la de formalismo: parece que la matemática haya de ser formalizada desde sus comienzos, siendo las evidencias totalmente en contra.

Comenzaremos por el asunto de la matemática y la formalidad. Es claro que conocemos los números naturales sin conocer en absoluto el formalismo de la teoría de conjuntos ni los axiomas de Peano para los naturales. Difícilmente conocemos el principio de inducción matemática, la mayoría de las veces se aprende en algún curso introductorio a la matemática en alguna facultad de ciencias. El tratamiento de los conjuntos ha llevado a la humanidad bastante tiempo el descubrirlo, aún siendo un asunto que se trasluce fácilmente del pensar habitual.

El logos conoce los objetos puros sin necesidad de formalizar. El hábito del pensar generalizador parece hacer el trabajo duro de llevarnos hasta los objetos puros sin pasar por los milimétricos pasos de la lógica-matemática. Sin embargo la lógica-matemática y el intento de fundamentar todas las matemáticas ha sido enormemente esclarecedor sobe la naturaleza del pensar matemático. Es por ese esclarecimiento que hemos podido seguir los pasos del pensar generalizante hasta el logos. Luego no es coincidencia que el camino que hemos escogido y encontrado para pensar la matemática haya sido el seguido por la formalización que en el siglo XX se ha hecho de la matemática. Que pensar el pensar matemático nos haya llevado por el camino que hemos recorrido, fundamentando desde otras instancias del conocimiento la formalización actual de las matemáticas no refleja más que para hacer teoría del pensar matemático no podemos pasar por alto el inmenso esfuerzo de fundamentación que se ha hecho en las ciencias formales, pero eso no nos dice cómo pensamos efectivamente a nivel psicológico las ideas puras, ni tampoco constituye un análisis interno de la operación cognitiva. Cabe recordar que la lógica como ciencia formal la inventa Aristóteles hace ya dos miles de años, pero la lógica llevaba actuando desde los orígenes del hombre. Llevamos el mismo tiempo contando números, usándolos, sin embargo hace solo poco más de cien años que intentamos fundamentar de forma completamente lógica el qué sean los números. Siempre me ha sorprendido que la diferencia entre ser elemento de un conjunto y ser subconjunto del mismo no estuviera clara hace tan solo algo más de cien años.

El otro punto es el que podríamos llamar de visión convencionalista de las matemáticas. El problema es que la palabra convención suele tener connotaciones que no podemos asociar de ningún modo al logos. Aquí, convención no es un trato o acuerdo entre varios, en absoluto. Las matemáticas son en todo caso un acuerdo previo de toda la humanidad para ser exactamente humanidad, esto es, es condición necesaria de ser hombre. La actitud correcta ante las matemáticas ha de ser la de pensamiento absolutamente necesario. Dados los objetos formales que hemos ido encontrando, las ideas puras traen consigo una red articulante, un lenguaje, que no solo nos trae el objeto sino también todas sus propiedades de forma necesaria, y las relaciones entre objetos del logos son obligadas, necesariamente, por ese lenguaje. A diferencia de otros lenguajes tratados por Wittgenstein, el decir del logos es del decir fundamental, dónde nombrar es lo que se necesita para la corrección, definir es definir en un lenguaje que no es fruto del pacto o de la evolución del idioma o de las relaciones interpersonales y sociales: es el lenguaje de referencia para el pensar.

Por otra parte, puede chocar que hayamos desarrollado la lógica sin hacer referencia a los conceptos de verdad/falsedad. Solo tenemos desarrollos formales necesarios. Esto no quiere decir que de alguna forma el logos no contribuya al concepto de verdad, pero es Tarski el que deja claro que no es formalizable el concepto de verdad, luego no puede ser un concepto matemático, no se puede utilizar en matemáticas por que no es susceptible de definición.

Como referencia básica para este epílogo es el libro “Nominalismo, idealismo y realismo” de Leonardo Polo[Polo, 1997]. En este libro se plantea exactamente cual es el marco del nombrar, a la vez que se discute el fundamento de la propiedad de ser verdadero o falso de un juicio. En el nominalismo encuentra una dificultad grave al no tener referencias reales con ningún tipo de entidad propia (lo extra-mental es el hecho, el ser de un ente es el hecho añadido a la esencia de existir de hecho) que propicia un voluntarismo que se introduce en la fundamentación de la verdad. Por otro lado el idealismo no tiene más remedio que buscar la fundamentación de la verdad más que en el propio pensar, creando así un círculo vicioso en la fundamentación. Bien, la idea pura en ningún momento hace referencia a la realidad extra-mental, de dónde el nombre, la definición es todo lo que nos queda. De hecho, en el logos, la verdad se disuelve en corrección. En este ámbito del pensar no existe diferencia entre nominalismo y realismo.

"Y Yahveh Dios formó del suelo todos los animales del campo y todas las aves del cielo y los llevó ante el hombre para ver cómo los llamaba, y para que cada ser viviente tuviese el nombre que el hombre le diera. El hombre puso nombres a todos los ganados, a las aves del cielo y a todos los animales del campo, mas para el hombre no encontró..."[77]
Parafraseamos esta cita: "Y el hombre puso nombre a todos los pensamientos ... Hasta que fueron objetos que acompañaban todos los demás objetos de su pensamiento".

Notes

[1]Fundamentalmente volúmenes II y III, aunque más adelante será relevante el volumen IV.

[2]En su forma holística, sin relación explícita con la sensación.

[3]Las notas no son atributos propiamente dichos, ya que al pensar una idea general, las notas no son individuales en el objeto idea general, luego podemos pensar en ellas como gérmenes de los atributos.

[4]Aunque mantengo la referencia clásica de "aquí y ahora", es importante ver que sólo es ahora.

[5]Hago referencia no a una imposibilidad, sino a un ámbito de la investigación sobre el conocimiento que no es relevante para nuestra investigación, por lo que asumimos lo dicho en estas frases.

[6]Secundariamente.

[7]Solo ***ahora***.

[8]En este contexto de encuentro de insuficiencias, las notas o atributos terminarán siendo tratadas o superadas en predicados en el *logos*. Así que no estoy identificando notas/atributos y predicados, sino que se hace referencia al proceso de encuentro de insuficiencias y al seguimiento de los indicios que encontraremos.

[9]Las palabras: primaria, primal, maximal y minimal, así como separación y saturación las utilizaremos hasta que se diga lo contrario de manera informal, indicativa y poco precisa, debiéndonos guiar por la intuición que sugieren.

[10]No entro aquí en la problemática de la diferencia específica, en si esta es posible en la forma tradicionalmente interpretada. Sin embargo, los términos especie, género e idea general, son intercambiables en este texto, siendo el menos apropiado precisamente el de especie.

[11]En la teoría del conocimiento poliana, la generalización es por medio exclusivamente de la negación, no por comparación ya que la diferencia específica no se da en una operación de suya, por lo que de alguna forma el encuentro de diferencias no es más que alguna composición de otras operaciones. La diferencia es un compuesto que ha de ser una idea general ella misma.

[12]Este "directamente" es quizás uno de los mayores escollos al pensar la génesis de la operación de negación.

[13]Desde un abstracto y el recuerdo de otro

[14]No digo en absoluto que en el abstracto sólo entren como ingredientes la sensibilidad y las ideas generales, ya que conozco el abstracto como unidad íntegra: pero sí que son ingredientes ya integrados en él.

[15]La intersección de notas no es una operación de la inteligencia en la teoría poliana, sin embargo, es el único camino de descenso en la jerarquía de las ideas generales.

[16]Cuando son pensadas en una unidad a través del tiempo, ya que una idea general intenta ser una unidad a través del tiempo, pero una idea general es in-idéntica, igual solo en el acto inmanente de pensarla.

[17]Ésta será la definición de generalización en el texto, a sabiendas que existirán otras formas de referir parcialmente el abstracto y las ideas y flexión entre la generalización y estas otras formas de referencia.

[18]Ésta también podría ser tomada como definición de generalización por lo tanto, ya que la definición anterior implica esta propiedad de las ideas generales sobre la relación de las notas entre dos géneros relacionados por la generalización, y a su vez esta propiedad asegura la generalización en el sentido anterior.

[19]Utilizaremos esta definición en todo el texto.

[20]Noción de idea de algo (sin concreción) o de nada, si atendemos a los casos que cubre

[21]Ídem que el anterior.

[22]Idem que el anterior.

[23]Notas ortogonales o normales o independientes entre sí quiere decir notas tales que al quitar una las otras realmente no cambien en algo su significado. Por ejemplo, el color depende del tamaño de la superficie, ya que si hacemos el tamaño de una superficie nulo, el color desaparece necesariamente.

[24]Una nota es simple si realmente no es des-componible en otras notas más atómicas o esenciales. Una nota totalmente simple ofrecería algunos problemas serios en cuanto a su predicabilidad y su conexión o componibilidad con otras notas.

[25]Ésta es notación para decir una idea general que comprende los casos de la idea general A menos exactamente el caso a.

[26]Una mono-nota no es articulable desde el punto de vista de poner y quitar con una idea general, ya que debido a su atomicidad no admite relaciones con el resto de notas.

[27]Queda establecida la noción de idea general maximal respecto a algunas otras ideas generales y/o abstractos.

[28]Ídem de la idea máximamente general del pensamiento.

[29]Por una parte quiere decir toda mi operatividad intelectual sensible a lo largo del tiempo de mi vida, por lo tanto móvil, porque esta actividad no cesa, por lo tanto no es objeto alguno, jamás en presencia, y por otra parte es algo, pero sin contenido alguno.

[30]Nos estamos refiriendo al Absoluto hegeliano o de otros idealismos.

[31]Por una parte quiere decir nada de mi operatividad intelectual sensible a lo largo del tiempo de mi vida, por lo tanto no es objeto alguno, jamás en presencia, y por otra parte es algo, pero sin contenido alguno.

[32]Nos estamos refiriendo a la noción de pensamiento vacío o de algo o de mínimo pensable hegeliano.

[33]Existencia de un paso simple entre ideas generales.

[34]Con esto no digo que la generalización sea algo fallido, tampoco que no haya proceso de generalización, o que la relación de contención de ideas se haya ido al traste. Solo digo que no hay un objeto que nos lleve de una idea general a otra, no hay tal operación, la idea general generaliza como objeto de una operación, pero el ver diferencias o las notas que se quitan es en hábito, en la advertencia que algo sobra, que algo podemos pensar mejor.

[35]Notación que utilizaremos desde ahora para esta noción.

[36]Notación para notas separadas en letras griegas minúsculas.

[37]Notación general para la nota φ es una de las notas de A.

[38]Esta es la noción de extensión, que como veremos no es un objeto sino más bien una advertencia de un lugar del pensamiento superior al de las ideas generales.

[39]Esta aclaración sobre ideas generales que se pueden utilizar es indicativa y no resuelve el problema de fondo, esto es, no podemos hacer la operación de aclarado de forma efectiva, es solo un indicio que tomamos.

[40]Estos nombres tienen base en nociones matemáticas que guardan cierta analogía. Hay que no tratarlos en absoluto confundiéndolos con los objetos o las propiedades matemáticas sino más bien en la forma escrita o como analogías lejanas.

[41]Vendrá desde el concepto racional, de la advertencia de lo extra-mental.

[42]De estas tres ecuaciones, la dos últimas son NO INTUICIONISTAS.

[43]*NO INTUICIONISTA*

[44]Adopto el convenio de simbolizar las variables de proposición por letras griegas

mayúsculas.

[45]Sigo de cerca [Husserl, 1928], aunque no esté completamente deslindado este terreno y es seguro que quedan investigaciones transcendentales sobre este tema. Lo tomo en lo que de evidente y bien analizado hay en este libro, que es mucho.

[46]Nótese que realmente no es un paso nuevo ya que en la extensión, de fondo, no puede haber casos y menos aún abstractos. Este análisis es del indicio obtenido. No son *pasos* propiamente dichos.

[47]Cómo son dichas en las Investigaciones Lógicas de Husserl[Husserl, 1900].

[48]Aún no hemos visto en qué consista ese nombrar.

[49]Aquí pensables es un término más técnico para no utilizar entes, y para no utilizar objetos que es también un término técnico en la teoría general del conocimiento poliano.

[50]Más adelante veremos las diferencia entre estos dos predicados.

[51]Aunque si habrá inclusión.

[52]Si estas clases no pueden ser casos de $\mathfrak{U}$ se llamarán *clases propias*.

[53]Las llamo *relación-reglas* y no simplemente reglas, porque este último término es a menudo utilizado en la teoría del conocimiento poliana para describir aspectos de las ideas generales.

[54]Estamos pensando la matemática como iluminando el camino ascendente solamente, pero cabe un camino descendente que nos dirá mucho si partimos desde la metafísica, el ser del universo.

[55]De «decible», que se puede decir en el sentido de pensar: no confundir con «decidible» que tiene que ver con la capacidad intrínseca de un sistema formal para decidir si una sentencia es verdadera o falsa.

[56]En el lenguaje de Quine [Quine, 1960], solo podríamos hablar de clases virtuales. Mi oposición a esta terminología es que lo virtual es el terreno de la matemática. Lo que con solo nombrarse es, luego si es pensable, es. Las clases virtuales no tienen porqué ser instanciables, esto es, podemos no poder hablar en absoluto de los elementos, como si no existieran, lo cual es contrario a la tendencia de si es nombrable (definible) existe en el logos matemático.

[57]La introducción aquí de la palabra-partícula "hipotética" no obedece, en general, al uso de la palabra hipótesis en la teoría del conocimiento de Polo.

[58]Si no cae ningún caso será la extensión $\emptyset$.

[59]Sin embargo hay muchas otras formas de introducir el par ordenado, ocurriendo que en algunas axiomáticas de teoría de conjuntos se establezca el par ordenado de

forma axiomática dando unidad a la sugerencia de par ordenado.

[60]Excepto la introducción de la extensión potencia de una extensión: aunque introducida con el ejemplo en una extensión muy pequeña, en general cumple una función parecida similar a la generación, y el decirla de extensiones que son casos es un decir fuerte, que aunque introducido fácilmente requiere un estudio mucho mayor.

[61]También conocida por el símbolo $\mathbb{N}$.

[62]El pensable generador-nominal tiene sentido mientras aún no hemos llegado a nombrar satisfactoriamente la nueva extensión, una vez establecida ésta, deja lugar a una transformación, por ejemplo entre la extensión establecida y sí misma.

[63]Esta transformación-nominal la leeríamos ***siguiente***.

[64]Como ya lo hemos hecho con la unión de extensiones y con su potencia.

[65]Llamo a las diferencias que se generan en el logos matemático *extrínsecas* porque son extrínsecas a la realidad extra-mental, mientras que las con-causas son intrínsecas a esa realidad extra-mental. Podemos llamarlas explícitas, ya que explícitamente son objetos del logos, generadas explícitamente por el logos y las otras diferencias a las que nos podemos referir en cuanto al conocimiento son las implícitas en el abstracto, pero éstas se explicitan en el concepto de la razón que pugna, por eso he tomado la decisión de llamarlas extrínsecas.

[66]No entramos en el juicio que nos da más porque rebasa los niveles de conocimiento que hasta ahora hemos alcanzado.

[67]Este punto de la definición de suma no es necesario de establecer, que perfectamente nombrado por los otros dos, pero es conveniente hacerlo explícito porque aclara el sentido de $\sigma()$.

[68]$2 \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma(1)$y también $1+1 \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma(1)$ luego $2 = \sigma(1) = 1+1$.

[69]

a Definición del número natural 2

b Definición nº 3 de la suma

c Definición nº 2 de la suma

d Definición del número natural 4

[70]Sucesiones convergentes Cauchy de números racionales que son un subconjunto de $\omega \times \omega$.

[71]No es más que la lógica propia del logos

[72]Existe principio lógico de no-contradicción en la razón que pugna, la pregunta si es si es herencia del logos-matemático o viceversa.

[73]Curiosamente, en este librito, Dedekind da una demostración de la validez de conjuntos infinitos que es bastante similar a la que aquí hemos expuesto, con la distinción que aquí la hemos tratado como advertencia.

[74]Esto no quiere decir que no podamos tratar con clases, que son una herramienta de primer nivel en la matemática moderna, por ejemplo en la teoría de las categorías. Tampoco quiere decir que el tener número sea la separación más fina entre clases y conjuntos, y quizás en el futuro tengamos alguna idea de número (mediante funciones más amplias que las actuales se me ocurre por decir algo) más amplia que acreciente los conjuntos frente a las clases propias.

[75]*PM* es la referencia a "Principia Mathematica" de Bertrand Russell y Whitehead.

[76]Esto último es una lectura mía del resultado y no lo dice estrictamente el resultado.

[77]Génesis 2, 19-20

Apéndice: LISTA DE SÍMBOLOS USADOS CON INDICACIONES DE SUS SIGNIFICADOS

Solo vamos a enumerar aquellos símbolos que tienen significados en las distinciones hechas en el texto entre ideas generales, abstracciones, cosas, notas, casos, ideas extensas, extensiones nombradas, casos nombrados y notas nombradas. De los demás símbolos, al atenerse aq los habituales contenidos matemáticos y a los conjuntos y lógica formal, considero que no hace falta dar mayor detalle.

1. $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$: Letras latinas mayúsculas. Ideas generales individuales.
2. $a, b, c, \ldots, x, y, z$: Letras latinas minúsculas. «Casos» de la idea general [en su análisis].
3. $\phi, \varphi, \psi, \theta, \vartheta$: Algunas letras griegas minúsculas. «Notas» de la idea general.[en su análisis].
4. $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}$: Algunas letras griegas minúsculas en negrita. Notas ya nombradas.
5. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \varpi, \rho, \varrho, \tau, \upsilon, \chi$: Algunas letras griegas minúsculas. «Cosa» en el sentido ingenuo que se le da en este texto.
6. $\equiv$: Signo de equivalencia. Utilizado como mismidad o igualdad entre ideas extensas o extensiones nombradas.
7. $=$: Signo de igualdad. Utilizado como mismidad o igualdad entre las totalidades de los casos nombrados de extensiones nombradas.
8. $\Leftrightarrow$: Signo de equivalencia o biimplicación. Utilizado como mismidad o igualdad entre las notas nombradas de extensiones nombradas.
9. $\omega, \mathbb{N}$: Letra griega minúscula omega y letra matemática estándar. Nombre dado aquí y el más estándar a los números naturales.
10. $\sigma\,(), () + 1$: Letra griega minúscula sigma con un argumento y suma 1 al argumento. Nombre dado a la función siguiente de los números naturales y una indicación de qué se trata..
11. $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Xi, \Phi, \Sigma, \Upsilon, \Psi, \Omega$: Algunas letras griegas mayúsculas. Nombre dado a los esquemas de expresiones de notas nombradas.
12. $\boldsymbol{\mathcal{G}\mathrm{en}\,\{\}}$: Símbolo con argumentos. Ideas extendidas que generalizan a los argumentos (otras ideas).

13. $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar}\,\{\}$: Símbolo con argumentos. Ideas extendidas que particularizan a los argumentos (otras ideas).
14. $\{\}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{en\_a}\,\{\}$, $\supseteq$, $\not\supseteq$: Símbolo creado y estándares para la relación generaliza a... Argumento 1 (idea general) generaliza a las ideas generales y abstractos del argumento 2.
15. $\{\}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{ar\_a}\,\{\}$, $\subseteq$, $\not\subseteq$: Símbolo creado y estándares para la relación particulariza a... Argumento 1 (idea general) particulariza a las ideas generales del argumento 2.
16. ϵ, ε : letra griega minúscula épsilon y variante distinta de $\in$. Indica que es un «caso» de una o varias ideas generales.
17. $\ni$: Letra griega minúscula épsilon horizontalmente reflejado distinto de $\ni$. Indica que una o varias ideas generales tienen un «caso».
18. $\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{Z}}$: Letras latinas mayúsculas en estilo caligráfico negrita. Convención para las extensiones nombradas.
19. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{z}$: Letras latinas minúsculas en estilo germánico negrita. Convención para casos nombrados.
20. ${}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\mathcal{A}}, {}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\mathcal{B}}, \ldots, {}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}$: Prefijo superior para indicar los casos nombrados de...
21. ${}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{A}}, {}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{B}}, \ldots, {}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}$: Prefijo superior para indicar las notas nombradas de...
22. $\mathbf{V}$: Extensión nombrada correspondiente al absoluto.
23. $\top \equiv {}^{\boldsymbol{nt}}\mathbf{V}$: Notas nombradas correspondientes a $\mathbf{V}$.
24. $\mathfrak{U} \equiv {}^{\boldsymbol{cs}}\mathbf{V}$: Casos nombrados correspondientes a $\mathbf{V}$.
25. $\boldsymbol{\Lambda}$: Extensión nombrada correspondiente a la nada o a la contradicción.
26. $\perp \equiv {}^{\boldsymbol{nt}}\boldsymbol{\Lambda}$: Notas nombradas correspondientes a $\boldsymbol{\Lambda}$.
27. $\emptyset \equiv {}^{\boldsymbol{cs}}\boldsymbol{\Lambda}$: Casos nombrados correspondientes a $\boldsymbol{\Lambda}$.
28. $\in$, $\ni$, $\notin$: Símbolos estándar de pertenencia (o no) de un caso nombrado a una extensión, o de un elemento a una clase.

Bibliografía

[Dedekind, 1897] Dedekind, R. (1897). *Qué son y para qué sirven los números.*

[Frege, 1892] Frege, G. (1892). Sobre el sentido y la referencia. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, NF 100, 1892, S. 25-50.*

[Gödel, 1931] Gödel, K. (1931). Sobre proposiciones formalmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines. *Monatshefte für Mathematik und Physik, v. 38 n. 1, pp. 173–198.*

[Huntington, 1904] Huntington, E. V. (1904). Set of independent postulates for the algebra of logic. *Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 3 (Jul., 1904), pp. 288-309.*

[Husserl, 1900] Husserl, E. (1900). *Investigaciones Lógicas.*

[Husserl, 1928] Husserl, E. (1928). *Lecciones de fenomenología de la conciencia interna del tiempo.*

[Kant, 1787] Kant, I. (1787). *Crítica de la razón pura.*

[Polo, 1996] Polo, L. (1996). *Curso de Teoría del Conocimiento.* EUNSA.

[Polo, 1997] Polo, L. (1997). *Nominalismo, Idealismo y Realismo.* EUNSA.

[Porfirio, 268] Porfirio (268). *Isagoge.*

[Quine, 1937] Quine, W. v. O. (1937). Nuevos fundamentos para la lógica matemática. *American Mathematical Monthly, 44: 70-80.*

[Quine, 1960] Quine, W. v. O. (1960). *Palabra y Objeto.*

[Quine, 1969] Quine, W. v. O. (1969). *Teoría de Conjuntos y su Lógica.*

[Saumells, 1970] Saumells, R. (1970). *La geomatría euclídea como teoría del conocimiento.* Rialp.

[Saumells, 1994] Saumells, R. (1994). *La intuición visual.*

[Vanney, 2008] Vanney, C. E. (2008). *Principios reales y conocimiento matemático.* EUNSA.